Aufgabe 1 **(2,5+2,5+(1+1+1)=8 Punkte)**

Es seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3+4}{x+1},\\
&f_2\colon\ \{-2,0,2\}\times\{-1,0,1\} \to \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\,,\ (n,m)\mapsto n-m,\\
&f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin(x),\\
&f_4\colon [0;2\pi]\to[-1;1],\ x\mapsto\cos(x).
\end{aligned}$$

(i) Sei $A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$. Geben Sie hierbei alle vorkommenden Zahlen als vollständig gekürzte Brüche an.

(ii) Sei $B = \{-2,0,1,3\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.

(iii) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Schreiben Sie „Ja“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 zutrifft, und „Nein“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 nicht zutrifft.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2			
f_3			
f_4			

(*Hinweis : Achten Sie genau auf die Definitions- und Zielbereiche der Funktionen!*)

Lösung. (i) Es gilt[4 · 0,5P]

$$f_1(0)=4,\ f_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{8}+4}{\frac{3}{2}}=\frac{11}{4},\ f_1(1)=\frac{5}{2} \text{ und } f_1(2)=4,$$

sodass[0,5P]

$$f_1(A)=\left\{\frac{5}{2},\frac{11}{4},4\right\}.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(ii) Die Tabelle

$n\backslash m$	-1	0	1
-2	-1	-2	-3
0	1	0	-1
2	3	2	1

liefert [4 · 0,5P]

$$f_2^{-1}(\{-2\}) = \{(-2,0)\}\,,\ f_2^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}\,,$$
$$f_2^{-1}(\{1\}) = \{(0,-1),(2,1)\}\,,\ f_2^{-1}(\{3\}) = \{(2,-1)\}\,,$$

sodass[0,5P]

$$f_2^{-1}(B) = \{(-2,0),(0,0),(0,-1),(2,1),(2,-1)\}\,.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(iii) Es gilt:[3 · 1P]

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2	Nein	Ja	Nein
f_3	Nein	Nein	Nein
f_4	Nein	Ja	Nein

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Natriumhydroxid reagiert nach folgender Gleichung mit Brom zu Natriumbromid, Natriumbromat und Wasser:

$$a \cdot NaOH + 3 \cdot Br_2 \to b \cdot NaBr + c \cdot NaBrO_3 + d \cdot H_2O.$$

Die natürlichen Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

Lösung. Das LGS lautet[2P]

$$\begin{array}{rcl} a &=& b+c \\ a &=& 3c+d \\ a &=& 2d \\ 6 &=& b+c \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} a-b-c &=& 0 \\ a-3c-d &=& 0 \\ a-2d &=& 0 \\ b+c &=& 6 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right),$$

wobei die erste Zeile Na, die zweite Zeile O, die dritte Zeile H und die vierte Zeile Br entspricht. Der Gaußalgorithmus liefert [2P]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[III\to III-I]{II\to II-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV\to IV-II]{III\to III-II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV\to IV-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Also gilt mit der 4. Zeile

$$2d = 6 \Leftrightarrow d = 3$$

und mit der 3. Zeile folgt

$$0 = 3c - d = 3c - 3 \Leftrightarrow 3c = 3 \Leftrightarrow c = 1.$$

Die 2. Zeile liefert

$$0 = b - 2c - d = b - 2 - 3 = b - 5 \Leftrightarrow b = 5$$

und die 1. Zeile liefert schließlich

$$0 = a - b - c = a - 5 - 1 = a - 6 \Leftrightarrow a = 6.$$

Also[2P]

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$6 \cdot NaOH + 3 \cdot Br_2 \to 5 \cdot NaBr + NaBrO_3 + 3 \cdot H_2O.$$

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2t & 2t+3 \\ 2 & 2t+2 & 3t+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:[1P]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2t & 2t+3 & t \\ 2 & 2t+2 & 3t+4 & t+1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 2I]{II \to II - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2t-2 & 2t & t-1 \\ 0 & 2t-2 & 3t-2 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2t-2 & 2t & t-1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{array}\right).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:[1P]

(i) $t = 2$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die zweite Zeile liefert

$$1 = 2x_2 + 4x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - 2x_3$$

und die erste Zeile lautet

$$1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + 1 - 4x_3 + 3x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_3.$$

Wir erhalten also[1,5P]

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ \frac{1}{2} - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ; \; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $t \neq 2$: Die dritte Zeile liefert dann $x_3 = 0$,[0,5P] sodass die zweite Zeile

$$t - 1 = (2t-2)x_2 + 2tx_3 = (2t-2)x_2$$

ergibt. Da $2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, machen wir wieder eine Fallunterscheidung:[1]

(a) $t = 1$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die erste Zeile liefert

$$1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2x_2,$$

sodass[1P]

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) $t \neq 1$: Die zweite Zeile liefert

$$t - 1 = (2t-2)x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2},$$

sodass mit der ersten Zeile

$$1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

folgt. Wir erhalten also[2P]

$$\mathbb{L}_t = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}).$$

Aufgabe 4 **(2+4+2=8 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ay = c$.

Lösung. (i) Wir entwickeln nach der zweiten Zeile und erhalten[1,5P]

$$\begin{aligned}\det(A) &= -1 \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right) + 0 \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\right) - (-1) \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right) \\ &= -8 + 0 + 7 = -1 \neq 0.\end{aligned}$$

Also ist A invertierbar.[0,5P]

(ii) Wir benutzen den Gaußalgorithmus:[4P]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 2III - 5I]{II \to 2II - I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III + 7II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -12 & 14 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to \frac{1}{2} III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \to II + III]{I \to I + III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -12 & 16 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II \to -II]{I \to \frac{1}{2} I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 7 & -9 & -1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Nach der Vorlesung gilt[$2 \cdot 1$P]

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = A^{-1}c = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **(2+2+4=8 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(i) $2z^2 + 1 = i\sqrt{3}$,

(ii) $z^2 + 4(1 + 2i - z) = 0$,

(iii) $z^4 - 16 = 10iz^2$.

Geben Sie hierbei die Lösungen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung. Wir gehen wie in Vorlesung 8, Folien 19 & 20 vor.

(i) Wir schreiben die Gleichung zunächst wie folgt um:

$$2z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0.$$

Also gilt $a = 2, b = 0, c = 1 - i\sqrt{3}$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Wir schreiben nun Δ in Polarkoordinaten. Es gilt

$$|\Delta| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

sodass $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ folgt (vgl. Tabelle). Wir erhalten also[1P]

$$\Delta = e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

sodass[1P]

$$z_1 = e^{i\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = -e^{i\frac{1}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) Wir schreiben die Gleichung zunächst wie folgt um:

$$z^2 - 4z + 4 + 8i = 0.$$

Also gilt $a = 1, b = -4, c = 4 + 8i$, sodass[1P]

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -4 - 8i + 4 = -8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi} \neq 0.$$

Damit erhalten wir[1P]

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{8}e^{i\frac{1}{2}\frac{3}{2}\pi} - \frac{b}{2a} = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} + 2 = \sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 = -2 + 2i + 2 = 2i, \\ z_1 &= -\sqrt{8}e^{i\frac{1}{2}\frac{3}{2}\pi} - \frac{b}{2a} = -(-2 + 2i) + 2 = 4 - 2i. \end{aligned}$$

(iii) Wir benutzen die Substitution $w = z^2$. Die Gleichung ist dann äquivalent zu

$$z^4 - 10iz^2 - 16 = 0 \iff w^2 - 10iw - 16 = 0.$$

Also gilt $a = 1, b = -10i, c = -16$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 16 - 25 = -9 = 9e^{i\pi} \neq 0.$$

Damit folgt[2 · 1P]

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{9}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{b}{2a} = 3i + 5i = 8i = 8e^{i\frac{1}{2}\pi}, \\ w_2 &= -\sqrt{9}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{b}{2a} = -3i + 5i = 2i = 2e^{i\frac{1}{2}\pi}. \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert[4 · 0,5P]

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{8}e^{i\frac{1}{2}\frac{1}{2}\pi} = \sqrt{8}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 2i, \\ z_2 &= -z_1 = -2 - 2i, \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{1}{2}\frac{1}{2}\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i, \\ z_4 &= -z_3 = -1 - i. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \left(-\frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\cos(x) + \sin(x)),$$
$$g\colon (0;\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}.$$

(i) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $a = 0$.

(ii) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von g in $a = \frac{\pi}{2}$.

Lösung. (i) Es gilt[1+2P]

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}, \\
f''(x) &= \frac{(-\cos(x) - \sin(x))(\cos(x) + \sin(x)) - (-\sin(x) + \cos(x))(-\sin(x) + \cos(x))}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\
&= \frac{-(\cos(x) + \sin(x))^2 - (-\sin(x) + \cos(x))^2}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\
&= \frac{-2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\
&= \frac{-2}{(\cos(x) + \sin(x))^2}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi\right)$. Damit folgt[1P]

$$\begin{aligned}
T_{f,0,2}(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 \\
&= 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}(-2)x^2 \\
&= x - x^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Da $1/\tan = \cos/\sin$, gilt[3 · 1P]

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin(x)^2} = -\frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}, \\
g''(x) &= 2\sin(x)^{-3}\cos(x) = 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)^3} \\
g'''(x) &= 2\frac{(-\sin(x))\sin(x)^3 - \cos(x)3\sin(x)^2\cos(x)}{\sin(x)^6} \\
&= 2\frac{-\sin(x)^4 - 3\cos(x)^2\sin(x)^2}{\sin(x)^6} \\
&= -2\frac{\sin(x)^2 + 3\cos(x)^2}{\sin(x)^4} \\
&= -2\frac{1 + 2\cos(x)^2}{\sin(x)^4}
\end{aligned}$$

für alle $x \in (0;\pi)$. Damit folgt[1P]

$$\begin{aligned}
T_{g,\frac{\pi}{2},3}(x) &= g\left(\frac{\pi}{2}\right) + g'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}g''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}g'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \\
&= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 0\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}(-2)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \\
&= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sin(x_1) - x_2^2,$$
$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \ln(x_2^2 + 1) + \exp(1 - x_3).$$

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{e-1}} \\ \sqrt{e-1} \\ 1-\ln(2) \end{pmatrix}\right)$.

Lösung. (i) Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$g_{1,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x) - a_2^2,$$
$$g_{2,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(a_1) - x^2,$$

sodass

$$g'_{1,a}(x) = \cos(x),$$
$$g'_{2,a}(x) = -2x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also[2P]

$$\operatorname{grad}(f)(a) = \begin{pmatrix} \cos(a_1) \\ -2a_2 \end{pmatrix}.$$

Damit a ein kritischer Punkt is müssen

$$\cos(a_1) = 0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2}\pi \text{ oder } a_1 = \frac{3}{2}\pi,$$
$$-2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

gelten, sodass[2P]

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

die kritischen Punkte von f sind.

(ii) Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{e-1}} \\ \sqrt{e-1} \\ 1-\ln(2) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{a,1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x+2, \\ \tilde{g}_{a,2} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e}{\sqrt{e-1}} \ln(x^2+1)+2, \\ \tilde{g}_{a,3} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e}{\sqrt{e-1}} + \exp(1-x), \end{aligned}$$

sodass[3P]

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_{a,1}(x) &= 1, \\ \tilde{g}'_{a,2}(x) &= \frac{e}{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1}, \\ \tilde{g}'_{a,3}(x) &= -\exp(1-x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir[1P]

$$\operatorname{grad}(\tilde{f}) \left(\begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{e-1}} \\ \sqrt{e-1} \\ 1-\ln(2) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	0	-1	$\frac{3}{2}$	2

Bestimmen Sie ein Polynom 3. Grades, das die Messdaten interpoliert.

(*Hinweis : Die Koeffizienten des Polynoms sind ganzzahlig.*)

Lösung. Wir machen den Ansatz[1P]

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Messdaten liefern dann

$$\begin{aligned} p(-1) &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ p(0) &= x_1, \\ p\left(\frac{1}{2}\right) &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_4, \\ p(1) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{aligned}$$

sodass[1P]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen nun das LGS $Ax = y$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to 8III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{III \to III - 8I \\ IV \to IV - I}]{II \to II - I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV \to IV - 2II]{III \to III - 12II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV \to 3IV - III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \end{array}\right).$$

Damit folgt $x_4 = -4$[1P] und die 3. Zeile liefert[1P]

$$24 = 6x_3 - 3x_4 = 6x_3 + 12 \Leftrightarrow x_3 = 2.$$

Aus der 2. Zeile erhalten wir[1P]

$$-1 = x_2 - x_3 + x_4 = x_2 - 2 - 4 = x_2 - 6 \Leftrightarrow x_2 = 5,$$

sodass[1P]

$$0 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - 5 + 2 + 4 = x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = -1.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$p(t) = -1 + 5t + 2t^2 - 4t^3 \quad (t \in \mathbb{R}).$$