Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 - 2z + 2\sqrt{3}i = -3$,

(ii) $z^4 - 12 = 8iz^2$.

Geben Sie hierbei die Lösungen in der Form $a + bi$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung. (i) Wir gehen wie in Vorlesung 8, Folien 19 & 20 vor. Hierzu schreiben wir die Gleichung zunächst wie folgt um:

$$z^2 - 2z + 3 + 2\sqrt{3}i = 0.$$

Also gilt $a = 1,\ b = -2,\ c = 3 + 2\sqrt{3}i$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -3 - 2\sqrt{3}i + 1 = -2 - 2\sqrt{3}i \neq 0.$$

Wir schreiben nun Δ in Polarkoordinaten. Es gilt

$$|\Delta| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

sodass $\varphi = \frac{4}{3}\pi$ folgt (vgl. Tabelle). Wir erhalten also

$$\Delta = 4e^{i\frac{4}{3}\pi},$$

sodass

$$z_1 = \sqrt{4}e^{i\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi} + 1 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} + 1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \sqrt{3}i,$$

$$z_2 = -\sqrt{4}e^{i\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi} + 1 = -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 2 - \sqrt{3}i.$$

(ii) Wir gehen wie in Vorlesung 8, Folien 19 & 20 vor und benutzen die Substitution $w = z^2$. Hierzu schreiben wir die Gleichung wie folgt um:

$$z^4 - 8iz^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 8iw - 12 = 0.$$

Also gilt $a = 1,\ b = -8i,\ c = -12$, sodass

$$\Delta = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -4 \neq 0.$$

Wir schreiben Δ in Polarkoordinaten (man kann dies direkt tun, da $-1 = e^{i\pi}$). Es gilt

$$|\Delta| = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = 4$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{0}{4} = 0,$$

sodass $\varphi = \pi$ folgt (vgl. Tabelle). Wir erhalten also

$$\Delta = 4e^{i\pi},$$

sodass

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{4}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{-8i}{2\cdot 1} = 2(0+i) + 4i = 6i = 6e^{i\frac{1}{2}\pi}, \\ w_2 &= -\sqrt{4}e^{i\frac{1}{2}\pi} - \frac{-8i}{2\cdot 1} = -2i + 4i = 2i = 2e^{i\frac{1}{2}\pi}. \end{aligned}$$

(Um $6i$ und $2i$ in Polarkoordinaten zu schreiben müssten wir die Rechnungen wie oben durchführen. Da $i = e^{i\frac{1}{2}\pi}$ gilt, kann man dies aber auch direkt hinschreiben.) Rücksubstitution liefert schließlich

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{6}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= -\sqrt{6}e^{i\frac{1}{4}\pi} = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}, \\ z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i, \\ z_4 &= -\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = -1 - i. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Betrachen sie die folgenden Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x &\mapsto x^2(1-\ln(x)) \\
g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x &\mapsto \sin(x)\exp(x^2+1)
\end{aligned}
$$

(i) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von f in $a = 1$.

(ii) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von g in $a = 0$.

Lösung. (i) Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x(1-\ln(x)) + x^2\left(-\frac{1}{x}\right) = x - 2x\ln(x), \\
f''(x) &= 1 - 2\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = 1 - 2\ln(x) - 2 = -1 - 2\ln(x), \\
f'''(x) &= -\frac{2}{x}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in (0;\infty)$. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
T_{f,1,3}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3 \\
&= 1 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}(-2)(x-1)^3 \\
&= 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \cos(x)\exp(x^2+1) + \sin(x)\exp(x^2+1)2x = \exp(x^2+1)(\cos(x) + 2x\sin(x)), \\
g''(x) &= \exp(x^2+1)2x(\cos(x) + 2x\sin(x)) + \exp(x^2+1)(-\sin(x) + 2\sin(x) + 2x\cos(x)) \\
&= \exp(x^2+1)\big(4x\cos(x) + 4x^2\sin(x) + \sin(x)\big)
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
T_{g,0,2}(x) &= g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{1}{2}g''(0)(x-0)^2 \\
&= 0 + e \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
&= ex
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 20x_1 - 26x_2 + 38 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 2x_2)^2,$$

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \ln(\sin(x_1)^2 + 1) + x_2 \exp(x_3^2).$$

(i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \\ \sqrt{\ln(2)} \end{pmatrix}\right)$.

Lösung. (i) Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$g_{1,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 20x - 26a_2 + 38 + (x + a_2)^2 + (x + 2a_2)^2,$$
$$g_{2,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_1^2 - 20a_1 - 26x + 38 + (a_1 + x)^2 + (a_1 + 2x)^2,$$

sodass

$$g_{1,a}'(x) = 2x - 20 + 2(x + a_2) + 2(x + 2a_2) = 6x + 6a_2 - 20$$
$$g_{2,a}'(x) = -26 + 2(a_1 + x) + 2(a_1 + 2x)2 = 6a_1 + 10x - 26$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also

$$\operatorname{grad}(f)(a) = \begin{pmatrix} 6a_1 + 6a_2 - 20 \\ 6a_1 + 10a_2 - 26 \end{pmatrix}.$$

Damit a ein kritischer Punkt ist müssen also

$$\begin{array}{rcl} 6a_1 + 6a_2 - 20 & = & 0 \\ 6a_1 + 10a_2 - 26 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} 6a_1 + 6a_2 & = & 20 \\ 6a_1 + 10a_2 & = & 26 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 20 \\ 6 & 10 & 26 \end{array}\right)$$

gelten, sodass

$$a = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

der einzige kritische Punkt von f ist.

(ii) Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} & \sqrt{\ln(2)} \end{pmatrix}^T$. Dann gilt

$$\tilde{g}_{a,1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\sin(x)^2 + 1) + \frac{2}{\sqrt{\ln(2)}}$$
$$\tilde{g}_{a,1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2x$$
$$\tilde{g}_{a,1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \exp(x^2)$$

sodass

$$\begin{aligned}
\tilde{g}'_{a,1}(x) &= \frac{1}{\sin(x)^2+1} \cdot 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)^2+1} \\
\tilde{g}'_{a,2}(x) &= 2 \\
\tilde{g}'_{a,3}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \exp(x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{\ln(2)}} \exp(x^2)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\operatorname{grad}(\tilde{f})\left(\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{\ln(2)}} \\ \sqrt{\ln(2)} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
y	7	3	1

Als Modellfunktion betrachen wir

$$f_{x_1,x_2}\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto x_1 + x_2 \cdot \frac{1}{t}$$

mit Parametern $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Führen Sie eine lineare Ausgleichsrechnung durch um die optimalen Parameter $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}$ zu finden.

Lösung. Die Messdaten liefern

$$\begin{aligned} f_{x_1,x_2}\left(\frac{1}{3}\right) &= x_1 + 3x_2, \\ f_{x_1,x_2}\left(\frac{1}{2}\right) &= x_1 + 2x_2, \\ f_{x_1,x_2}(1) &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

sodass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \\ A^T y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T y = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -14 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

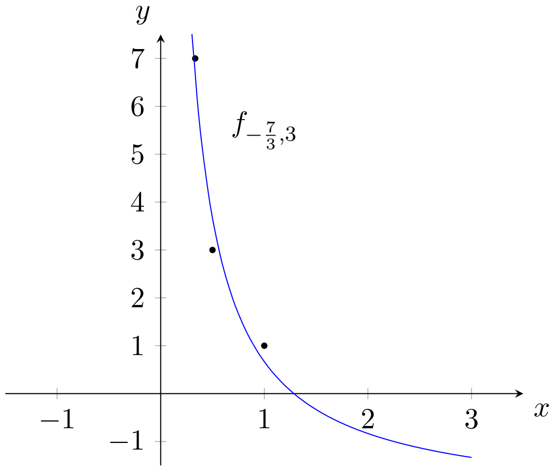
(*Hinweis : Wir können auch das Gleichungssystem*

$$A^T A x^* = A^T y$$

mit dem Gaußalgorithmus lösen. Dies erspart uns das Invertieren von $A^T A$.)

Die gesuchte Funktion ist also

$$f_{-\frac{7}{3},3}\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto -\frac{7}{3} + 3\frac{1}{t}.$$



y
7
6
5
4
3
2
1
-1
$f_{-\frac{7}{3},3}$
-1
1
2
3
x