

Aufgabe 1**(5+5=10 Punkte)**Sei $t \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + tx_2 & = & t \\ 2x_2 - x_3 & = & -t \\ tx_1 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Für welche Werte von t hat $(*)$

- keine Lösung
- eine Lösung
- unendlich viele Lösungen ?

Hinweis: Bringen Sie $(*)$ mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform.(b) Bestimmen Sie für die Fälle $t = 1$ und $t = -2$ jeweils die Lösungsmenge von $(*)$.

Hinweis: Benutzen Sie Ihre Rechnung aus (a).

Aufgabe 2**(5+5=10 Punkte)**(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 3 \\ 2x+1 & x+3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3**(10 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4**(5+5=10 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

- (b) Bestimmen Sie zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 0 & 353 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte.

Aufgabe 5**(5+5=10 Punkte)**Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

(a) $z^2 + 2z + 2 = 0$

(b) $z^2 = -8i$

Sie können die folgende Tabelle nutzen:

| φ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ |
|----------------|---|-----------------------|-----------------|------------------------|-------|------------------------|------------------|------------------------|
| $\cos \varphi$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\sin \varphi$ | 0 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |

Aufgabe 6**(3+3+4=10 Punkte)**Bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert der nachstehenden Folgen (in \mathbb{R} oder in $\{\pm\infty\}$). Begründen Sie Ihre Lösung mit Hilfe der Grenzwertsätze.

(a) $\left(\frac{3n^2+7}{2n^2-n+5}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(-\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{3 \sin(n^2)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$