UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Dr. Jochen Krebs
WS 2010/2011

Zwischenklausur zu Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

1. Aufgabe: **5 Punkte**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

2. Aufgabe **4 + 1 = 5 Punkte**

Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe **3 + 2 = 5 Punkte**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 0 & a-2 & a-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?

4. Aufgabe **1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte**

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gelte $\det(A) = 1$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch, und welche sind nicht anhand der gegebenen Informationen entscheidbar?
Begründen Sie ihre Antwort jeweils mit einem Satz.

(a) A ist invertierbar.

(b) Die aus den Zeilen von A gebildeten Vektoren sind linear abhängig.

(c) Es gibt einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$.

(d) Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst das Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot B = E_3$ (wobei E_3 die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichnet).

5. Aufgabe **1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte**

Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem *für die erste Matrix A* zu jedem Eigenwert die Eigenvektoren an.

6. Aufgabe **2 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte**

(a) Finden Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die folgende quadratische Gleichung erfüllen:

$$3z^2 + 12z + 39 = 0.$$

(b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $\frac{(1-i)^2}{1+3i}$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $-1 + \sqrt{3}\, i$.

7. Aufgabe **1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte**

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$) besitzen und bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Grenzwert.

(a) $\left(\frac{4n^2-3n+8}{3n^2-n+1}\right)_{n\geq 1}$

(b) $\left(2 + \left(\frac{5}{4}\right)^n\right)_{n\geq 1}$

(c) $\left(n - \sqrt{n^2 - (-1)^n}\right)_{n\geq 1}$

(d) $\left(\frac{n^3+4n^2}{3^n}\right)_{n\geq 1}$

(e) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$

8. Aufgabe **2 + 3 = 5 Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt:

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{1}{6}\left(a_{n-1}^2 + 9\right) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass $a = 3$ der einzige Kandidat für den Grenzwert ist.

(b) Weisen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach, indem Sie nachprüfen, dass $a = 3$ eine obere Schranke für alle Folgeglieder ist und die Folge monoton wächst.