Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

genau dann nicht leer ist, wenn $t = -2$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungsmenge.

Aufgabe 2 **(2+3+2=7 Punkte)**

Seien Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Matrixprodukt $C = A \cdot B$. Ist das Matrixprodukt $B \cdot A$ ebenfalls definiert? Begründen Sie, wieso es nicht definiert ist, oder berechnen Sie es.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix $C = A \cdot B$ invertierbar ist, und bestimmen Sie C^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Cx = \binom{4}{5}$.

Aufgabe 3 **(6+2=8 Punkte)**

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 3 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(*Hinweis: Man kann den Gauß-Algorithmus auch mit Entwicklungen nach geeigneten Zeilen bzw. Spalten kombinieren.*)

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

linear abhängig?

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(9 Punkte)**

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **((2+5)+3=10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + 2iz - 1 = 0$.

(ii) $(1 - i)z^2 + 4z - 4iz + 6 - 2i = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}w)$ für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt. (*Hinweis: Benutzen Sie, dass* $|a|^2 = a \cdot \overline{a}$ *und* $2\,\mathrm{Re}(a) = a + \overline{a}$ *für alle* $a \in \mathbb{C}$ *gilt.*)

Viel Erfolg!