Aufgabe 1 **(2,5+2,5+(1+1+1)=8 Punkte)**

Seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 5x - 4,$$
$$f_2\colon\ \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\} \to \{1,2,\dots,16\}\,,\ (n,m) \mapsto n \cdot m,$$
$$f_3\colon [0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$$
$$f_4\colon [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto x^2.$$

(i) Sei $A = \{-1, 0, 1, 2\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$.

(ii) Sei $B = \{2, 7, 9, 14\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.

(iii) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Schreiben Sie „Ja“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 zutrifft, und „Nein“, falls die Eigenschaft auf f_2, f_3 bzw. f_4 nicht zutrifft.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2			
f_3			
f_4			

Lösung. (i) Es gilt[4 · 0,5P]

$$f_1(-1) = -10,\ f_1(0) = -4,\ f_1(1) = 2 \text{ und } f_1(2) = 14,$$

sodass[0,5P]

$$f_1(A) = \{-10, -4, 2, 14\}\,.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(ii) Es gilt[4 · 0,5P]

$$f_2^{-1}(\{2\}) = \{(1,2),(2,1)\}\,,\ f_2^{-1}(\{7\}) = \emptyset,\ f_2^{-1}(\{9\}) = \{(3,3)\}\,,\ f_2^{-1}(\{14\}) = \emptyset,$$

sodass[0,5P]

$$f_2^{-1}(B) = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}\,.$$

(*Hinweis : Es reicht, wenn man nur die letzte Menge angibt.*)

(iii) Es gilt:[3 · 1P]

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f_2	Nein	Nein	Nein
f_3	Ja	Nein	Nein
f_4	Ja	Ja	Ja

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Silber reagiert nach folgender Gleichung mit Salpetersäure:

$$3 \cdot Ag + a \cdot HNO_3 \to b \cdot AgNO_3 + c \cdot NO + d \cdot H_2O.$$

Die natürlichen Zahlen a, b, c, d, für welche diese Reaktionsgleichung erfüllt ist, lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem berechnen. Stellen Sie dieses auf und lösen Sie es.

Lösung. Das LGS lautet[2P]

$$\begin{array}{rcl} 3 &=& b \\ a &=& 2d \\ a &=& b+c \\ 3a &=& 3b+c+d \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} b &=& 3 \\ a-2d &=& 0 \\ a-b-c &=& 0 \\ 3a-3b-c-d &=& 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

wobei die erste Zeile Ag, die zweite Zeile H, die dritte Zeile N und die vierte Zeile O entspricht. Der Gaußalgorithmus liefert [2P]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV \to IV-3I]{III \to III-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV \to IV+3II]{III \to III+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{IV \to IV-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$3d = 6 \Leftrightarrow d = 2$$

und mit der 3. Zeile folgt

$$3 = -c + 2d = -c + 4 \Leftrightarrow -c = -1 \Leftrightarrow c = 1.$$

Die 2. Zeile liefert

$$b = 3$$

und die 1. Zeile liefert schließlich

$$0 = a - 2d = a - 4 \Leftrightarrow a = 4.$$

Also[2P]

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$3Ag + 4HNO_3 \to 3AgNO_3 + NO + 2H_2O.$$

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -t & -1 & t \\ 6 & 6 & t+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1-2t \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:[1P]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ -t & -1 & t & 1-2t \\ 6 & 6 & t+6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 3I]{II \to 2II + tI} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2t-2 & 4t & 2 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:[1P]

(i) $t = 0$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die zweite Zeile liefert

$$2 = -2x_2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

und die erste Zeile lautet

$$4 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 2 + 2x_3 \Leftrightarrow x_1 = 3 - x_3.$$

Wir erhalten also[1,5P]

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - x_3 \\ -1 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $t \neq 0$: Die dritte Zeile liefert dann $x_3 = 0$,[0,5P] sodass die zweite Zeile

$$2 = (2t-2)x_2 + 4tx_3 = (2t-2)x_2$$

ergibt. Da $2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, machen wir wieder eine Fallunterscheidung:[1]

(a) $t = 1$: Das LGS lautet nun

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Da sich die zweite und dritte Zeile widersprechen, folgt[1P]

$$\mathbb{L}_1 = \emptyset.$$

(b) $t \neq 1$: Die zweite Zeile liefert

$$2 = (2t-2)x_2 = 2(t-1)x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{t-1},$$

sodass mit der ersten Zeile

$$4 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2x_1 + \frac{2}{t-1} \Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{1}{t-1}$$

folgt. Wir erhalten also[2P]

$$\mathbb{L}_t = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{t-1} \\ \frac{1}{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}).$$

Aufgabe 4 **(2+4+2=8 Punkte)**

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -4 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}. (*Hinweis : Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(iii) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ay = c$.

Lösung. (i) Wir entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten[1,5P]

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\det\left(\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0 - 3(-7+8) + 2(-7+8) = -1 \neq 0.\end{aligned}$$

Also ist A invertierbar.[0,5P]

(ii) Wir benutzen den Gaußalgorithmus:[4P]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - 2I]{II \to II + I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III \to III + II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to II + 2III]{I \to I - 2III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I \to I + 3II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to -II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Nach der Vorlesung gilt[$2 \cdot 1$P]

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = A^{-1}c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$