Mathematatik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

10. Vorlesung, 11.01.2018
(Stand: 13.01.2018, 11:13 Uhr)

Satz

Seien $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^r$. Dann gilt

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

für alle $x \in (0;\infty)$.

Beispiel

1. Betrachte $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$. Dann gilt
$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$
für alle $x \in (0;\infty)$.
2. Betrachte $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^{\sqrt{2}}$. Dann gilt
$$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$
für alle $x \in (0;\infty)$.

(Affin) Lineare Approximation

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in a differenzierbar ist. Dann können wir die Funktion durch die Tangente

$$t_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$$

annähern. Die Tangente erfüllt also

$$t_a(a) = f(a) \quad \text{und} \quad t_a'(a) = f'(a),$$

d. h. die Tangente t besitzt mehr Eigenschaften von f als unsere erste Näherung

$$c_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(a).$$

Beispiel

Betrachte die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{1}{6}x^3$ im Punkt $a = 1$. Es gilt

$$f(1) = 1 - \frac{1}{6} \cdot 1^3 = \frac{5}{6},$$

und

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{6} \cdot 3x^{3-1} = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

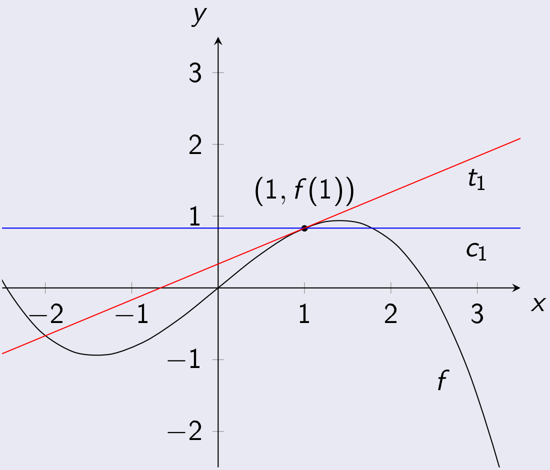
für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}.$$

Also ist die Tangente von f im Punkt $a = 1$

$$t_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x.$$

Beispiel



Um unsere gegebene Funktion noch besser in einem Punkt approximieren zu können, benötigen wir „höhere“ Ableitungen.

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Falls f' im Punkt a differenzierbar ist, d. h. der Grenzwert

$$f''(a) := (f')'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

existiert, dann sagen wir, dass f in a *zweimal differenzierbar* ist und nennen $f''(a)$ die *zweite Ableitung von f in a*.
Wir können dies weiterführen und nennen eine Funktion f *n-mal differenzierbar in a* ($n \in \mathbb{N}^*$), wenn

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

existiert. Hierbei benutzen wir die Notation $f = f^{(0)}$.

Bemerkung

Durch die zweite Ableitung wird die Krümmung einer Funktion beschrieben.

Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x^2 + 2)$. Es gilt
$$f'(x) = \exp(x^2 + 2) \cdot (2x) = 2x \exp(x^2 + 2)$$
und
$$f''(x) = 2\exp(x^2+2) + 2x\exp(x^2+2)(2x) = (2+4x^2)\exp(x^2+2)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Es gilt
$$g'(x) = -\frac{1}{x^2},\ g''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{und} \quad g'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$
für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir haben auf Folie 3 gesehen, dass zu $a \in \mathbb{R}$ und einer in a differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Tangente t_a die Gleichungen

$$t_a(a) = f(a) \quad \text{und} \quad t_a'(a) = f'(a)$$

erfüllt. Da die (affin) linearen Funktionen gerade die Polynome mit Grad 1 sind, stellt sich die Frage, ob es Polynome höheren Grades gibt, die die Funktion genauer approximieren.

Frage

Seien $a \in \mathbb{R}$ und f eine in a n-mal differenzierbare Funktion. Gibt es dann ein Polynom p_a n-ten Grades, das

$$p_a(a) = f(a),\ p_a'(a) = f'(a),\ \ldots, p_a^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

erfüllt?

Seien $a \in \mathbb{R}$ und f eine in a dreimal differenzierbare Funktion. Betrachte das Polynom

$$p_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen

$$p_a(a) = f(a),\; p_a'(a) = f'(a), p_a''(a) = f''(a) \quad \text{und} \quad p_a'''(a) = f'''(a)$$

lieferen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= f(a) = \frac{1}{0!} f''(a), \\ a_1 &= f'(a) = \frac{1}{1!} f''(a), \\ 2a_2 &= f''(a) \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(a) = \frac{1}{2!} f''(a), \\ 2 \cdot 3 a_3 &= f'''(a) \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{6} f'''(a) = \frac{1}{3!} f'''(a). \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} x \mapsto & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 \\ = & \frac{1}{0!}f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3. \end{aligned}$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in a n-mal differenzierbare Funktion.

Definition

Wir nennen das Polynom

$$\begin{aligned} T_{f,a,n} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{0!} f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \end{aligned}$$

das *n-te Taylorpolynom von f im Punkt a*.

Bemerkung

1. Im Fall $n = 0$ entspricht $T_{f,a,0}$ der konstanten Funktion c_a (vgl. Folie 3).
2. Im Fall $n = 1$ entspricht $T_{f,a,1}$ der Tangente t_a von f im Punkt a.
3. Nach Konstruktion erfüllt $T_{f,a,n}$ die Gleichungen
$$T_{f,a,n}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$
für alle $0 \leq k \leq n$.
4. Ist $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, so gilt
$$T_{p,a,n}(x) = p(x)$$
für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$, d. h. das n-te Taylorpolynom von p in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$ stimmt mit p überein.

Beispiel

1. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{1}{6}x^3$ und $a = 1$. Dann gilt

$$f''(x) = -x \quad \text{und} \quad f'''(x) = -1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass

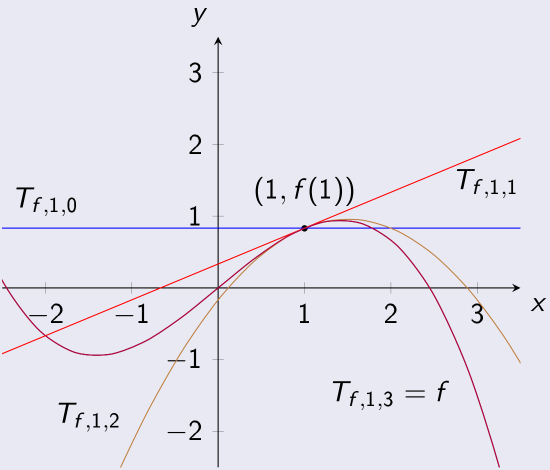
$$f''(1) = -1 \quad \text{und} \quad f'''(1) = -1.$$

Also gilt für das 3-te Taylorpolynom von f im Punkt $a = 1$

$$\begin{aligned} &T_{f,1,3}(x) \\ =&\frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}\cdot(-1)\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\cdot(-1)\cdot(x-1)^3 \\ =&\frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 - \frac{1}{6}\cdot(x-1)^3 \\ =&f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel



Beispiel

2 Betrachte die Funktion $g\colon (-1;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Wir wollen nun das 2-te Taylorpolynom von g in $a = 0$ bestimmen. Es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{und} \quad g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

für alle $x \in (-1;1)$,sodass

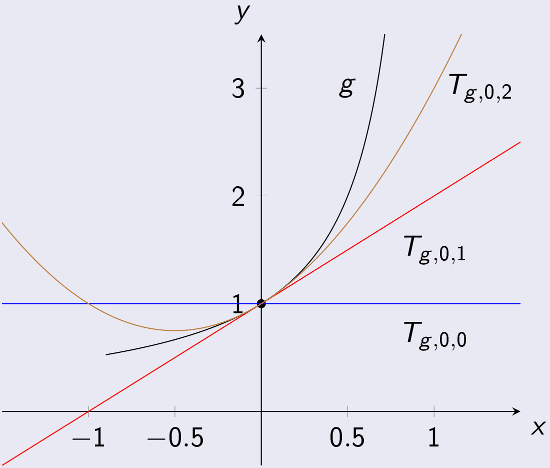
$$g(0) = 1,\ g'(0) = 1 \quad \text{und} \quad g''(0) = 2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} T_{g,0,2}(x) &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1(x-0) + \frac{1}{2!} \cdot 2(x-0)^2 \\ &= 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1;1)$.

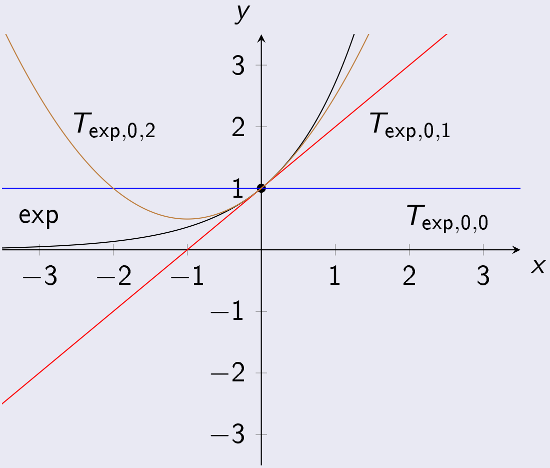
Beispiel



Beispiel

3. Für die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = e^x$ gilt
$$\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$$
für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, sodass
$$\exp^{(k)}(0) = 1$$
für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt für das n-te Taylorpolynom von exp in $a = 0$
$$\begin{aligned} T_{\exp,0,n}(x) &= \frac{1}{0!}\cdot 1 + \frac{1}{1!}\cdot 1(x-0) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot 1(x-0)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beispiel



Beispiel

4. Man kann sich überlegen, dass

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Ebenfalls gilt

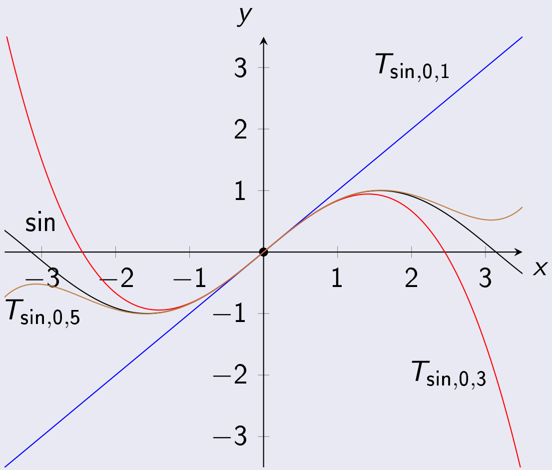
$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{und} \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt z.B. für das 3-te Taylorpolynom von sin in $a = 0$

$$T_{\sin,0,3}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel



Beispiel

5 Betrachte die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\exp(x^2+x)$. Wir wollen das 2-te Taylorpolynom von h im Punkt $a=0$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1\exp(x^2+x) + x\exp(x^2+x)\cdot(2x+1) \\ &= (1+x+2x^2)\exp(x^2+x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &h''(x) \\ =&(1+4x)\exp(x^2+x) + (1+x+2x^2)\exp(x^2+x)\cdot(2x+1) \\ =&(2+7x+4x^2+4x^3)\exp(x^2+x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also folgt

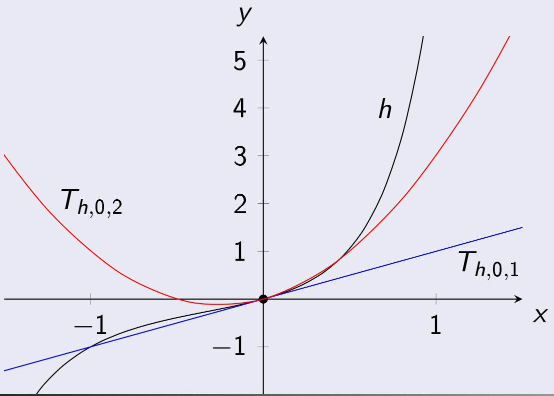
$$h(0)=0,\ \ h'(0)=1 \quad \text{und} \quad h''(0)=2.$$

Beispiel

Also folgt

$$T_{h,0,2}(x) = x + 2x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.



Taylorreihe (heuristisch)

Ist eine Funktion f in einem Punkt a beliebig oft differenzierbar, so können wir auch die *Taylorreihe* von f im Punkt a betrachten, die dadurch entsteht, dass wir n „gegen unendlich“ laufen lassen:

$$T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

für geeignete $x \in \mathbb{R}$. Im Gegensatz zu den Taylorpolynomen muss die Taylorreihe nicht überall existieren; es kann sogar vorkommen, dass diese nur im Punkt a definiert ist.

Beispiel

1. $f\colon (-1;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x},\ a = 0$:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x)$$

für alle $x \in (-1;1)$.

2. Für die Taylorreihe von cos bzw. sin in $a = 0$ gilt

$$T_{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x)$$

und

$$T_{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel

3. Für die Taylorreihe von exp in $a = 0$ gilt

$$T_{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Für die Taylorreihe von ln in $a = 1$ gilt

$$T_{\ln,1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = \ln(x)$$

für alle $x \in (0; 2)$.

Bemerkung

In der Mathematik benutzt man diese *Reihendarstellungen* oft um die Exponentialfunktion (sogar auf ganz $\mathbb{C}$) zu definieren. Cosinus und Sinus sind dann folgendermaßen definiert:

$$\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

d. h. die Formeln auf Folie 11 aus Vorlesung 8 sind damit die Definitionen. Alle weiteren Eigenschaften (z.B. $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$) kann man mit dieser Definition nachrechnen.

Im Folgenden möchten wir gerne aus Messdaten Rückschlüsse auf die Gesetzmäßigkeit (Funktion) schließen.

Beispiel

Wir beobachten eine Räuberpopulation auf einer Insel und zählen in der Woche t die Anzahl der Räuber y. Wir erhalten die folgenden Messdaten:

t	1	3	7
y	20	25	16

Finden wir eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die diese Messdaten *interpoliert*, d. h.

$$f(1) = 20, \;\; f(3) = 25 \text{ und } f(7) = 16$$

erfüllt?

Die einfachsten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Polynome. Falls wir $n+1$ Messdaten $(t_1, y_1), \ldots, (t_{n+1}, y_{n+1})$ haben, nehmen wir ein Polynom p vom Grad n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel

Im vorherigen Beispiel betrachten wir also ein Polynom 2-ten Grades, da wir $3 = 2 + 1$ Messdaten haben:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 20 &= p(1) = a_0 + a_1 + a_2, \\ 25 &= p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2, \\ 16 &= p(7) = a_0 + 7a_1 + 49a_2. \end{aligned}$$

Beispiel

In Matrixschreibweise lautet dieses:

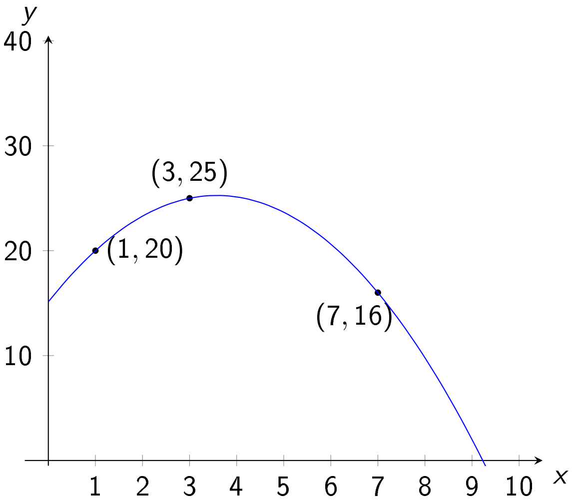
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 25 \\ 1 & 7 & 49 & 16 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{121}{8} \\ \frac{17}{3} \\ -\frac{19}{24} \end{pmatrix},$$

sodass

$$p(x) = \frac{121}{8} + \frac{17}{3}x - \frac{19}{24}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$


y
40
30
20
10
(3, 25)
(1, 20)
(7, 16)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x

Beispiel

Wir beobachten nun weiter und erhalten die Messdaten:

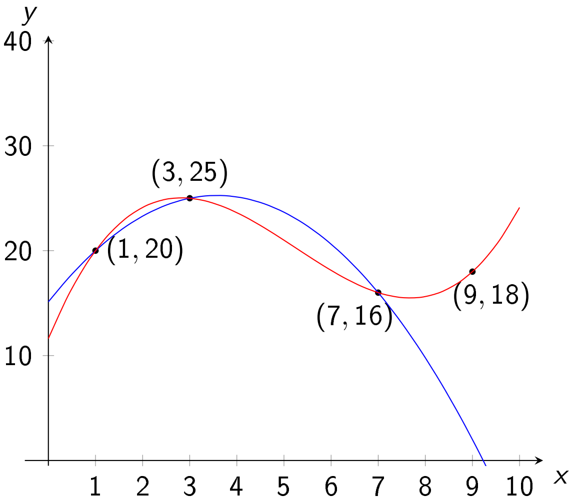
t	1	3	7	9
y	20	25	16	18

Das zugehörige lineare Gleichungssystem für ein Polynom q 3-ten Grades lautet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 25 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 16 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 18 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{93}{8} \\ \frac{65}{6} \\ -\frac{21}{8} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

sodass

$$q(x) = \frac{93}{8} + \frac{65}{6}x - \frac{21}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$


y
40
30
20
10
(3, 25)
(1, 20)
(7, 16)
(9, 18)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x