Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

13. Vorlesung, 26.01.2018
(Stand: 25.01.2018, 12:00 Uhr)

Die „Umkehrung" der Kettenregel ist die Substitutionsregel:

Satz (Substitutionsregel)

Sei u eine Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\int f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)} = [F(u(t))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Beispiel

1. $\int_a^b t\exp(t^2)\,\mathrm{d}t = ?$. Mit $u(t) = t^2$ und $u'(t) = 2t$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b t\exp(t^2)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{1}{2}u'(t)\exp(u(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\exp(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}[\exp(x)]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}[\exp(t^2)]_a^b\\ &= \frac{1}{2}(\exp(b^2)-\exp(a^2)).\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass eine Stammfunktion von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\exp(t^2)$ gegeben ist durch

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{2}\exp(t^2).$$

Beispiel

2. $\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t =?$. Mit $u(t) = t+1$ und $u'(t) = 1$ folgt

$$\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{u(t)-1}{\sqrt{u(t)}}\,\mathrm{d}t,$$

sodass $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ die Lösung

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \frac{u(t)-1}{\sqrt{u(t)}} u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4 = \frac{2}{3}(2+\sqrt{2})\end{aligned}$$

liefert.

Beispiel

Die Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned} H\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto & \frac{2}{3}(u(t))^{\frac{3}{2}} - 2(u(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von

$$h\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$$

ist.

In der Vorlesung werden noch folgende Themen angesprochen:

1. Umrechnen von Einheiten
2. Partielle Ableitungen in der Physik
3. Wurzeln und Potenzen von Brüchen