Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

20.10.2017

Vorlesung

- **Zeit und Ort**: Freitag, 12:00-13:30 Uhr, Hörsaal II, Gebäude E2.5
- **Homepage**: https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS1718/mfb/index.html
- **Folien**: Die Vorlesungsfolien stehen donnerstags ab 12:00 Uhr online. Sie können sich damit die Folien vorher durchlesen und ausdrucken.

Dozent

- **Dominik** Schillo
- **Büro**: Zimmer 4.21, Gebäude E2.4
- **Telefon**: 0681 302 4824
- **Mail**: schillo (at) math.uni-sb.de
- **Sprechstunde (Allgemein)**: Donnerstag, 13:00-14:00 Uhr, Büro
- **Sprechstunde (Vorlesung)**: Dienstag, 12:00-13:00 Uhr, Übungsgruppenraum, Gebäude E2.4
- **Tutorium**: Mittwoch, 14:30-18 Uhr, Hörsaal II, Gebäude E2.5
- **Briefkasten**: Prof. Dr. Jörg Eschmeier, Foyer, Gebäude E2.4

Übungsgruppenleiter (Bremser)

1. Nadja Mostashiri
   - **Mail**: nadja.mostashiri (at) web.de
   - **Sprechstunden**: Dienstag, 10:00-11:00 Uhr, Übungsgruppenraum, Gebäude E2.4
   - **Übungen**: Freitag, 8:30-10:00 Uhr, Hörsaal IV; Dienstag, 12:15-13:45 Uhr, Hörsaal II, Gebäude E2.5
   - **Briefkasten**: 046, neben Zeichensaal, Gebäude E2.5
2. Katrin Will
   - **Mail**: katrin-will (at) t-online.de
   - **Sprechstunden**: Montag, 12:00-13:00 Uhr, Übungsgruppenraum, Gebäude E2.4
   - **Übungen**: Freitag, 14:15-15:45 Uhr, Zeichensaal; Montag, 8:30-10:00 Uhr, Seminarraum 10, Gebäude E2.4
   - **Briefkasten**: 049, neben Zeichensaal, Gebäude E2.5

Übungsgruppen I

- **Freiwillig** (Aber sehr zu empfehlen!)
- **Anmeldung**: Auf der Homepage bis einschließlich Montag, 23.10.2017. Bitte auf die Matrikelnummer achten und für die Mailadresse bitte die stud.uni-saarland.de-Adresse verwenden.
- **Einteilung**: Wird am Dienstag, 24.10.2017, auf der Homepage bekannt gegeben.

Übungsgruppen II

- **Übungsbetrieb**:
  - **1. Übungen**: Freitag, 27.10.2017; Montag, 30.10.2017; ~~Dienstag, 01.11.2017~~
  - **Modus**: Alle zwei Wochen wird freitags um 12:00 Uhr das neue Übungsblatt online gestellt, welches die Woche darauf freitags vor der Vorlesung in den Briefkästen neben dem Zeichensaal in Gebäude E2.5 abgegeben wird (Einzelabgabe). Ab dem kommenden Freitag wird dieses Blatt in den Übungen besprochen.
    Beispiel:
    - Ausgabe 27.10.2017
    - Abgabe: 03.11.2017
    - Besprechung: 10.11.2017, 13.11.2017 und 14.11.2017
  - **1. Übungsblatt**: Bereits online (Präsenzübungsblatt, keine Abgabe)

Übungsgruppen III

- Die **Musterlösung** wird jeweils (spätestens) mittwochs um 12:00 Uhr nach der letzten Übung online gestellt.
- **Bonuspunkte** für die Hauptklausuren: Auf den Übungsblättern können bis zu 10% der Punkte in der Klausur (sowohl für den ersten, als auch für den zweiten Termin) als Bonuspunkte erzielt werden. Diese berechnen sich wie folgt:

  $$\frac{\text{Prozent der Übungspunkte}}{10}\%.$$

  Die Bonuspunkte werden immer auf den nächsten halben Punkt gerundet. Beispiel:
  - Übungspunkte: 78%
  - Klausurpunkte: 60
  - Bonuspunkte: $\frac{78}{10}\% \cdot 60 = 4,68$, also 5

Zwischenklausur I

- **Freiwillig**
- **Ort und Zeit**: Hörsaal II (weitere Räume folgen eventuell), 15.12.2017, 12:15-13:45 Uhr
- **Anmeldung**: Listen in den Übungen. Falls Sie nicht an den Übungen teilnehmen, so melden Sie sich bitte per Mail an.
- **Identifikation**: Bitte bringen Sie Ihren Studierendenausweis mit.
- **Hilfsmittel**: Einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt
- **Bestehen**: Ab 50%

Zwischenklausur II

- **Bonuspunkte** für die Hauptklausuren: Falls Sie bestehen, können Sie bis zu 5% der möglichen Gesamtpunkte in der Hauptklausur als Bonuspunkte erreichen. Diese berechnen sich wie folgt:

$$\frac{\text{Prozent in der Zwischenklausur} - 50}{10}\%.$$

  Schließlich wird wieder auf den nächsten halben Punkt gerundet. Beispiel:
  - Zwischenklausur: 68%
  - Hauptklausurpunkte: 60
  - Bonuspunkte: $\frac{68-50}{10}\% \cdot 60 = 1,08$, also 1,5

Hauptklausuren

- **Ort und Zeit**:
  1. Termin: 07.02.2018, 9:00-12:00 Uhr, Hörsäle I-III, Gebäude E2.5
  2. Termin: 04.04.2018, 9:00-12:00 Uhr, Hörsäle I-III, Gebäude E2.5
- **Anmeldung**: Über das LSF. Falls dies nicht möglich sein sollte, bitte vorher mit mir abklären.
  Das Anmelden ist bis zwei Tage vor der Klausur möglich; das Abmelden bis zum Tag davor.
- **Identifikation**: Bitte bringen Sie Ihren Studierendenausweis mit.
- **Hilfsmittel**: Beidseitig beschriebenes DIN A4-Blatt
- **Bestehen**: Ab 50%

Themenüberblick

- Wiederholung des Schulstoffes
- Lineare Gleichungssysteme
- Komplexe Zahlen
- Interpolation, Approximation und Fehlerabschätzung
- Vektoranalysis
- Einfache Differentialgleichungen

Logik I

Seien A und B Aussagen.

- $A \wedge B$: „A und B"
  Beispiel: Die Sonne scheint. $\wedge$ Es ist warm. (Die Sonne scheint und es ist warm.)
- $A \vee B$: „A oder B oder beide"
  Beispiel: Ich fahre auf die Uni. $\vee$ Ich höre Musik. (Ich fahre auf die Uni, ich höre Musik oder mache beides.)
- $\neg A$: „Nicht A"
  Beispiel: $\neg$ Es regnet. (Es regnet nicht.)
- $A \Rightarrow B$: „Aus A folgt B", „Wenn A, dann B"
  Beispiel: Man erreicht 40% in der Klausur. $\Rightarrow$ Man fällt durch. (Wenn man 40% in der Klausur erreicht, dann fällt man durch.)

Logik II

- $A \Leftrightarrow B$: „Es gilt genau dann A, wenn B gilt.“, „A ist äquivalent zu B“
  Beispiel: Man besteht die Klausur. $\Leftrightarrow$ Man erreicht mindestens 50% in der Klausur. (Man besteht genau dann die Klausur, wenn man mindestens 50% in der Klausur erreicht.)
- $\forall$: „für alle“
  Beispiel: $\forall$ Menschen ... (Für alle Menschen ...)
- $\exists$: „existiert“
  Beispiel: $\exists$ Mensch ... (Es existiert ein Mensch ...)

Mengenlehre I

Bemerkung

- Wir können Mengen auf zwei unterschiedliche Arten beschreiben:
  1. Aufzählung, z.B. $\{a, b, c, d\}$,
  2. Charakterisierende Eigenschaft, z.B. $\{x \; ; \; x \text{ ist ein Mensch}\}$.
- Mengen können aus ganz unterschiedlichen Dingen bestehen, z.B. $\{\text{Tisch}, a, \otimes, +\}$.

Mengenlehre II

Seien M und N Mengen.

- $x \in M$: „x ist Element von M"
  Beispiel: $a \in \{a, b, c\}$
- $M \cap N = \{x \,;\; x \in M \wedge x \in N\}$: „Schnitt von M und N"
  Beispiel: $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$
- $M \cup N = \{x \,;\; x \in M \vee x \in N\}$: „Vereinigung von M und N"
  Beispiel: $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $M \subset N$: Für alle $x \in M$ gilt $x \in N$. „M ist eine Teilmenge von N."
  Beispiel: $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
- $M = N$: $M \subset N$ und $N \subset M$. „Die Mengen M und N sind gleich."
  Beispiel: $\{a, \dots, z\} = \{\square \,;\; \square \text{ Buchstabe im lat. Alphabet}\}$

Mengenlehre III

- Falls $N \subset M$: $M \setminus N = \{x \ ; \ x \in M \wedge x \notin N\}$: „Komplement von N in M“
  Beispiel: $\{a, b, c\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $M \times N = \{(x, y) \ ; \ x \in M \wedge y \in N\}$: „Kreuzprodukt von M und N“
  Beispiel:
  $\{a, b, c\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$
- $\emptyset$: „Leere Menge“
- $P(M) = \{L \ ; \ L \subset M\}$: „Potenzmenge von M“
  Beispiel: $P(\{a, b, c\}) =$
  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Natürliche Zahlen I

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

die *natürlichen Zahlen (mit 0)*. Falls wir die 0 ausschließen wollen, schreiben wir

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

Achtung: Diese Konvention ist nicht einheitlich. Verschiedene Bücher/Dozenten benutzen verschiedene Definitionen (mit oder ohne 0) der natürlichen Zahlen.

Wir können „auf“ $\mathbb{N}$ immer addieren und multiplizieren, d.h.

$$n + m \quad \text{und} \quad n \cdot m$$

sind für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Natürliche Zahlen II

Wir können Addition und Multiplikation auch Verschachteln, z.B.

$$18 \cdot (4 + (7 \cdot 4)),$$

wobei wir die Klammern benutzen um eine Reihenfolge der Rechenoperationen (innere Klammern zuerst) festzulegen.Weiterhin benutzen wir die übliche Konvention Punkt vor Strich, sodass obiges Beispiel zu

$$18 \cdot (4 + 7 \cdot 4)$$

wird. Die Klammer kann nicht weggelassen werden, da

$$18 \cdot (4 + 7 \cdot 4) = 18 \cdot (4 + 28) = 18 \cdot 32 = 576$$

und

$$18 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 72 + 28 = 100$$

nicht gleich sind. Diese Konvention werden wir auch bei allen kommenden Zahlenbereichen beibehalten.

Natürliche Zahlen III

Rechenregeln

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$.

- $l + m = m + l$ *(Kommutativität der Addition)*
- $l + (m + n) = (l + m) + n = l + m + n$ *(Assoziativität der Addition)*
- $n + 0 = 0 + n = n$ *(0 ist neutrales Element der Addition)*
- $l \cdot m = m \cdot l$ *(Kommutativität der Multiplikation)*
- $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n = l \cdot m \cdot n$ *(Assoziativität der Multiplikation)*
- $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *(1 ist neutrales Element der Multiplikation)*
- $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$ *(Distributivität)*

Diese Regeln gelten auch für alle kommenden Zahlenbereiche.

Ganze Zahlen

Wir können die Gleichung

$$4 + n = 5$$

in $\mathbb{N}$ lösen (d.h. es gibt eine natürliche Zahl n, die diese Gleichung erfüllt), aber

$$4 + n = 3 \qquad (*)$$

ist nicht mehr in $\mathbb{N}$ lösbar. Man kann für jede natürliche Zahl n eine neue Zahl $-n$ „konstruieren", die

$$n + (-n) = 0 \qquad (\text{z.B. } 2 + (-2) = 0)$$

erfüllt. Diese Gleichung schreiben wir auch abkürzend $n - n = 0$. Wir haben damit die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

eingeführt. Die Gleichung (*) ist nun in $\mathbb{Z}$ lösbar ($n = -1$).

Rationale Zahlen/Brüche I

Die Gleichung

$$(-2) \cdot m = 4$$

ist in $\mathbb{Z}$ lösbar, aber

$$3 \cdot m = 4 \qquad (**)$$

nicht mehr. Man kann nun für jede Zahl $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine neue Zahl (*Bruch* oder *rationale Zahl*) $\frac{p}{q}$ konstruieren, die

$$q \cdot \frac{p}{q} = p$$

erfüllt. Wir nennen p den *Zähler* und q den *Nenner*.

Rationale Zahlen/Brüche II

Diese Zahl ist nicht eindeutig, z.B. haben die Gleichungen

$$3 \cdot x = 9 \quad \text{und} \quad 9 \cdot x = 27$$

beide die Lösungen 3, aber auch $\frac{9}{3}$ bzw. $\frac{27}{9}$.

Definition

Seien $p, r \in \mathbb{Z}$ und $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir definieren:

- Es gilt genau dann $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, wenn $p \cdot s = r \cdot q$.
- $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{qs}$ (Addition).
- $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ (Multiplikation).

Wir bezeichnen mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

Rationale Zahlen/Brüche III

Rechenregeln

Seien $p, r \in \mathbb{Z}$ *und* $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. $\frac{p \cdot x}{q \cdot x} = \frac{p}{q}$ *für alle* $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *(„Kürzen/Erweitern")*
2. $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$
3. *Wir identifizieren* p *mit* $\frac{p}{1}$.

Bemerkung

Es ist hilfreich, wenn man bei der Addition zweier Brüche diese zunächst auf den gleichen Nenner („gemeinsamer Nenner") bringt, wobei dieser möglichst klein sein sollte. Wir kombinieren damit also die Regeln (1) und (2).

Rationale Zahlen/Brüche IV

Beispiel

- $\frac{3}{4}\frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$
- $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 7 \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{46}{24}$
- $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{14}{12} = \frac{23}{12}$
- $\frac{46}{24} = \frac{23 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{23}{12}$

Rationale Zahlen/Brüche V

Wie kann man einfach entscheiden, ob ein Bruch größer oder kleiner einem anderen Bruch ist?

Verfahren

Seien $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zwei Brüche.

$$\frac{p}{q} \square \frac{r}{s}$$

- *Zunächst erweitern wir einen Bruch mit (-1), falls der Nenner negativ ist (z.B. $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$). Wir können also ab jetzt annehmen, dass die Nenner positiv sind.*
- *Wir multiplizieren beide Seiten mit den positiven Nennern.*
- *Das Zeichen, das im letzten Schritt passt, passt auch am Anfang.*

Rationale Zahlen/Brüche VI

Beispiel

$$\frac{5}{-8} \square \frac{-7}{13}$$

- $\frac{-5}{8} \square \frac{-7}{13}$
- $-5 \cdot 13 \square -7 \cdot 8$, d.h. $-65 \square -56$
- $-65 < -56$.

Also

$$\frac{5}{-8} < \frac{-7}{13}.$$

Rationale Zahlen/Brüche VII

Satz

Wir können jeden Bruch $\frac{p}{q}$ *als*

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \frac{1}{10} + a_2 \frac{1}{100} + a_3 \frac{1}{1000} + \cdots$$

mit geeigneten $a_0 \in \mathbb{Z}$ *und* $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *darstellen. Diese Darstellung nennen wir Dezimaldarstellung und schreiben auch*

$$\frac{p}{q} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Verfahren

Wir führen eine schriftliche Division durch.

Rationale Zahlen/Brüche VIII

Beispiel

$$\begin{array}{rrcccc} & 3 & : & 4 & = & 0,75 \\ - & \underline{0} & & & & \\ & 30 & & & & \\ - & \underline{28} & & & & \\ & 20 & & & & \\ - & \underline{20} & & & & \\ & 0 & & & & \end{array}$$

Also

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Rationale Zahlen/Brüche IX

Frage

Gibt es für alle $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ eine rationale Zahl mit der Dezimaldarstellung

$$0, a_1 a_2 \cdots ?$$

Antwort

Nein. Die rationalen Zahlen haben eine Dezimaldarstellung, die *abbricht* (a_i's sind irgendwann alle 0) oder *periodisch* ist, d.h. ab einer Stelle gibt es eine Zahlenfolge, die sich immer wiederholt. Letzteres notieren wir mit $\overline{}$ über dieser Zahlenfolge.

Rational Zahlen/Brüche X

Beispiel

- $\frac{1}{8} = 0,125$
- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
- $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$

Bemerkung

Es ist einfacher mit rationalen Zahlen in der Bruchdarstellung zu rechnen als mit ihnen in der Dezimaldarstellung!

Reelle Zahlen

Definition

Wir nennen die Zahlen, die eine beliebige (abbrechende, periodische oder sonstige) Dezimaldarstellung haben, *reelle Zahlen* und schreiben für die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Beispiel

- $0,112123123412345123456\ldots$
- $\sqrt{2}$
- π
- e

Zahlenmengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: „Natürliche Zahlen (mit 0)“
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$: „Natürliche Zahlen ohne 0“
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: „Ganze Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$: „Rationale Zahlen“
- $\mathbb{R}$: „Reelle Zahlen“

Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Intervalle I

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \wedge x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}$: „Abgeschlossenes Intervall“
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x < b\}$: „Offenes Intervall“
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x < b\}$: „Halboffenes Intervall“
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x \leq b\}$: „Halboffenes Intervall“
- $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \leq a\}$
- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x < a\}$
- $[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x\}$
- $(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x\}$

Intervalle II

Beispiel