Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

27.10.2017
(Stand: 27.10.2017, 16:33 Uhr)

Frage

Wofür gibt es für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie überhaupt eine Mathematikvorlesung?

Antwort

Um (einen Teil) der grundlegenden mathematischen Werkzeuge in den Naturwissenschaften kennen und verstehen zu lernen.

Beispiel

- Auswertungen von Messdaten (Statistik, alle Naturwissenschaften)
- Modellierung von Prozessen in der Natur:
    - Populationsdynamik (Differentialgleichungen, Biologie)
    - Zellverhalten (Stochastik, Biologie)
    - Schwingungen (Differentialgleichungen, Physik)
    - Beschreibung von Molekülen (Symmetrien, Chemie)
    - Quantenmechanik (Funktionalanalysis, Chemie/Physik)
    - ...

Lotka-Volterra-Gleichungen I

Wir betrachten ein Räuber-Beute-Schema mit einer Gruppe Beute N_1 (z.B. Hasen) und einer Gruppe Räuber N_2 (z.B. Füchse). Wir nehmen folgende Sachverhalte an:

1. Gibt es mehr Beute, dann steigt die Geburtenrate der Räuber.
2. Gibt es mehr Räuber, dann steigt die Sterberate der Beute.

Modell:

- Falls keine Räuber vorhanden sind ($N_2 = 0$), so steigt die Anzahl der Beute nach der Differentialgleichung $\dot{N}_1 = r_1 N_1$, wobei $\dot{N}_1$ die zeitliche Ableitung von N_1 und r_1 die Vermehrungsrate der Beute bezeichnen.
- Falls keine Beute vorhanden ist ($N_1 = 0$), so sinkt die Anzahl der Räuber nach der Differentialgleichung $\dot{N}_2 = -r_2 N_2$, wobei r_2 die Sterberate der Räuber bezeichnet.

Lotka-Volterra-Gleichungen II

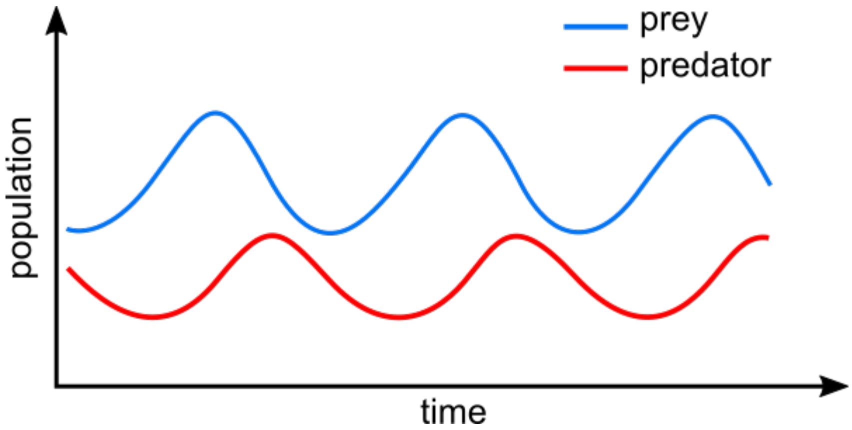
- Interaktion zwischen Räuber und Beute:
  - Die Vermehrungsrate der Beute r_1 sinkt um $k_1 N_2$, wobei k_1 der Verteidigungskoeffizient der Beute ist.
  - Die Sterberate der Räuber r_2 sinkt um $k_2 N_1$, wobei k_2 der Angriffskoeffizient der Räuber ist.

Wir erhalten damit die Differentialgleichungen

$$\dot{N}_1 = (r_1 - k_1 N_2) N_1 \quad \text{und} \quad \dot{N}_2 = (-r_2 + k_2 N_1) N_2 .$$

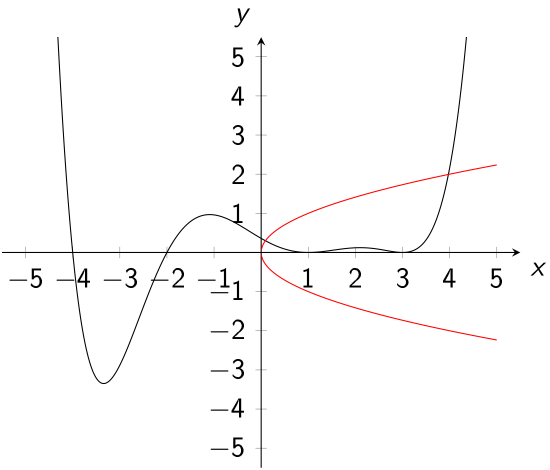
Quelle: `http://www.spektrum.de/lexikon/biologie/lotka-volterra-gleichungen/39926`

Lotka-Volterra-Gleichungen III



Quelle: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Lotka_Volterra_dynamics.svg`

Funktionen I



- Graph zur schwarzen Kurve $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; zulässig als Graph einer Funktion
- Graph zur roten Kurve $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; unzulässig als Graph einer Funktion (Nicht jedem x-Wert wird ein y-Wert zugeordnet und manchen x-Werten werden mehrere y-Werte zugeordnet.)

Funktionen II

Definition

Seien D und Z Mengen. Wir nennen ein Tripel $f = (G_f, D, Z)$ *Funktion*, falls

1. $G_f \subset D \times Z$ (*Graph der Funktion* f) und
2. für alle $x \in D$ existiert genau ein $y \in Z$, sodass $(x, y) \in G_f$.

In diesem Fall schreiben wir auch $y = f(x)$ für $x \in D$ und

$$f : D \to Z, \; x \mapsto f(x).$$

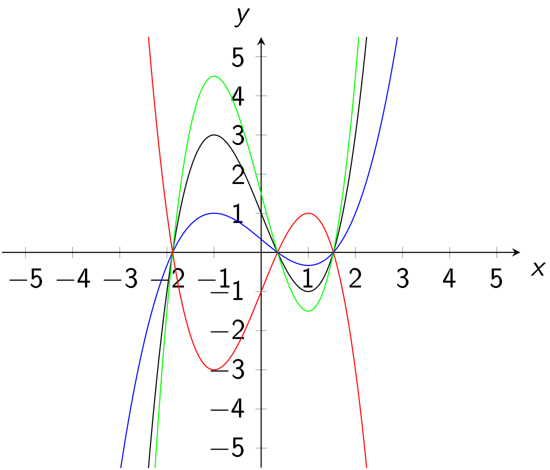
Die Mengen D und Z heißen *Definitionsmenge/Definitonsbereich* und *Zielbereich*.

Funktionen III

Bemerkung

- Der Definitions- und Zielbereich sind also Teil der Definition einer Funktion, d.h., wenn man eine dieser Mengen abändert, erhält man eine andere Funktion.
  Beispiele:
  - $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ sind unterschiedliche Funktionen.
  - $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g\colon \mathbb{R} \to [0;\infty),\ x \mapsto x^2$ sind unterschiedliche Funktionen, obwohl der Graph gleich aussieht.
  - $f(x) = x^2$ ist keine Funktion.
- Nach Punkt (2) kann jedem Element im Definitionsbereich also nur ein Element im Zielbereich zugeordnet werden.
  Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \pm x$ ist keine Funktion.

Stauchung, Streckung und Spiegelung



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 1)$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3}{2}(x^3 - 3x + 1)$
- $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -(x^3 - 3x + 1)$

Stauchung, Streckung und Spiegelung II

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Definition

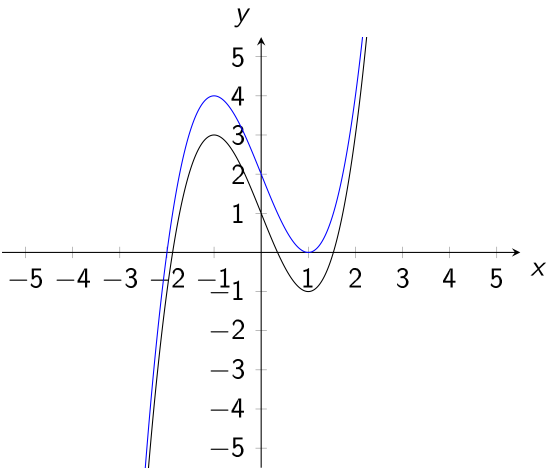
Wir definieren

$$\alpha f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha f(x).$$

Bemerkung

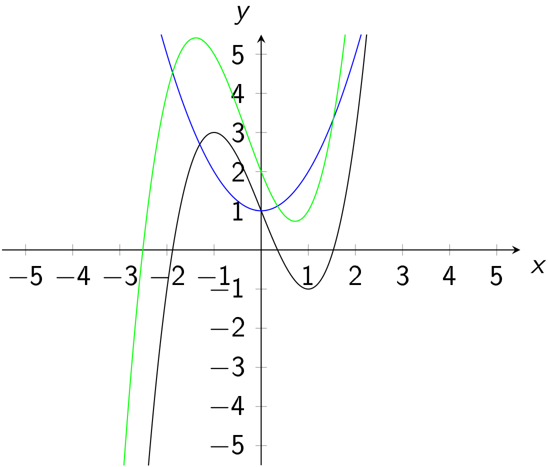
- $0 < \alpha < 1$: αf entsteht durch eine Stauchung von f.
- $\alpha > 1$: αf entsteht durch eine Streckung von f.
- $\alpha = -1$: αf entsteht durch eine Spiegelung von f an der x-Achse.

Summe I



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3 - 3x + 2$

Summe II



- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + x^2 - 3x + 2$

Summe III

Bemerkung

Wir können eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a$ identifizieren.

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Definition

Wir definieren

$$f + g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x).$$

Bemerkung

Wir können damit auch $f - g = f + (-g)$ definieren.

Produkt und Quotient

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Definition

Wir definieren

- $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ und,
- falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Zusammenfassung

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Definition

Wir definieren:

- $\alpha f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha f(x)$.
- $f + g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$.
- $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$.
- Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Bild I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Sei $A \subset D$. Wir nennen die Menge

$$f(A) = \{f(a)\ ;\ a \in A\} \subset Z$$

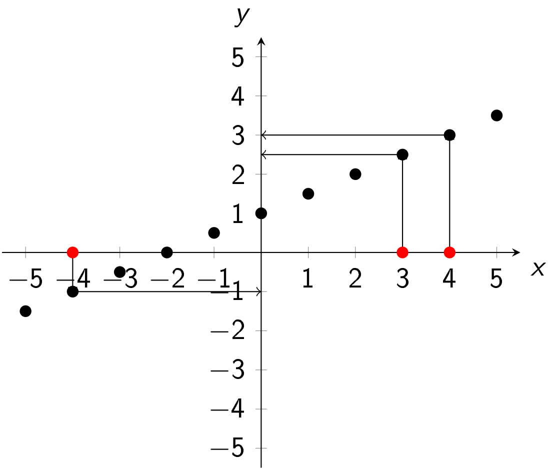
das *Bild von A unter der Funktion f*. Weiterhin nennen wir $f(D)$ das *Bild von f*.

Bemerkung

Für $A_1, A_2 \subset D$ gilt

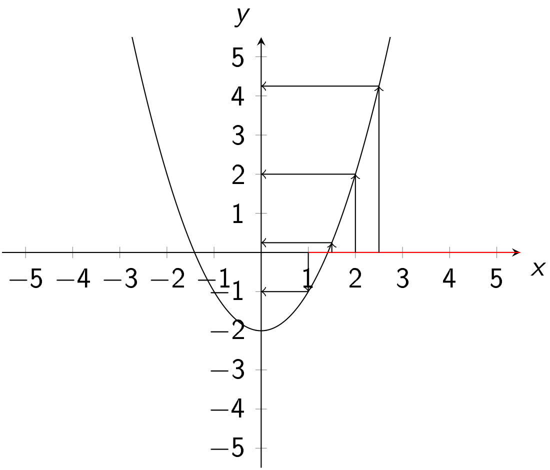
- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Bild II



- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$,
  $A = \{-4, 3, 4\}$:
  $f(A) = \left\{-1, \frac{5}{2}, 3\right\}$

Bild III



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2,$
  $A = [1; \infty)$: $f(A) = [-1; \infty)$

Urbild I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Sei $B \subset Z$. Wir nennen die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \;;\; f(x) \in B\} \subset D$$

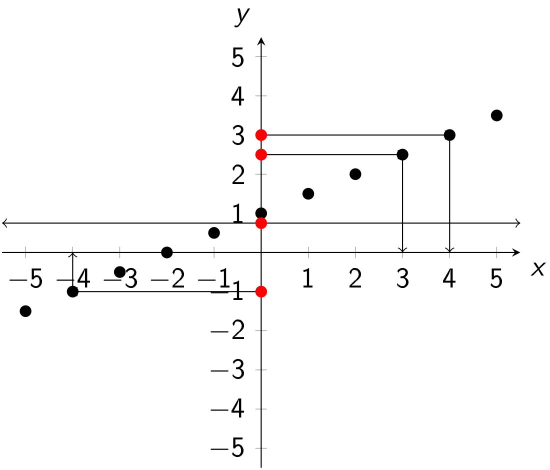
das *Urbild von B unter der Funktion f*.

Bemerkung

Für $B_1, B_2 \subset Z$ gilt

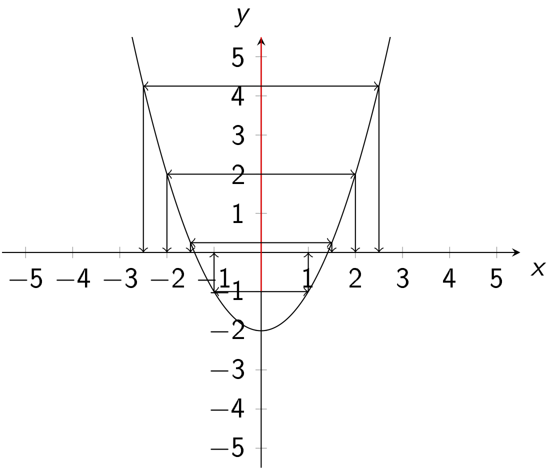
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Urbild II



- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{2}x+1,$
  $B=\left\{-1,\frac{3}{4},\frac{5}{2},3\right\}$:
  $f^{-1}(B)=\{-4,3,4\}$

Urbild III



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2,$
  $B = [-1; \infty)$:
  $f^{-1}(B) = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$

Injektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

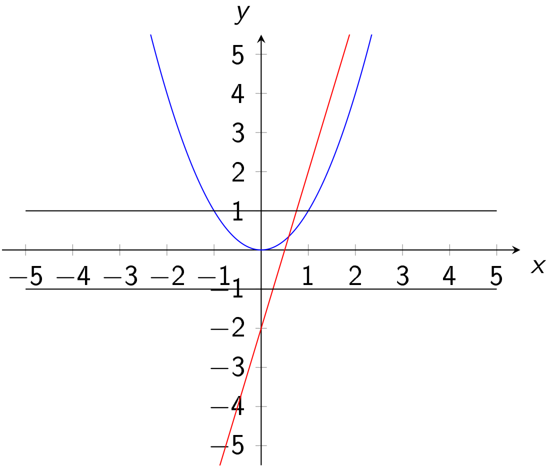
Definition

Wir nennen f *injektiv*, falls jedes Element im Bild von f von genau einem Element aus der Definitionsmenge angenommen wird.

Bemerkung

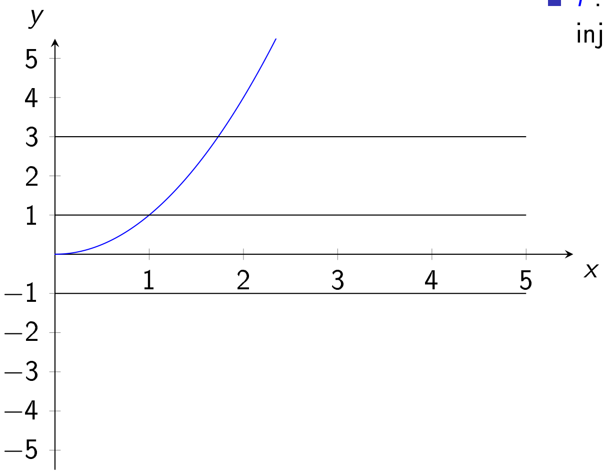
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Injektivität der Funktion f, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen in maximal einem Punkt trifft.

Injektivität II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(1) = 1 = f(-1)$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 2$ ist injektiv.

Injektivität III



- $f : [0; \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv.

Surjektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

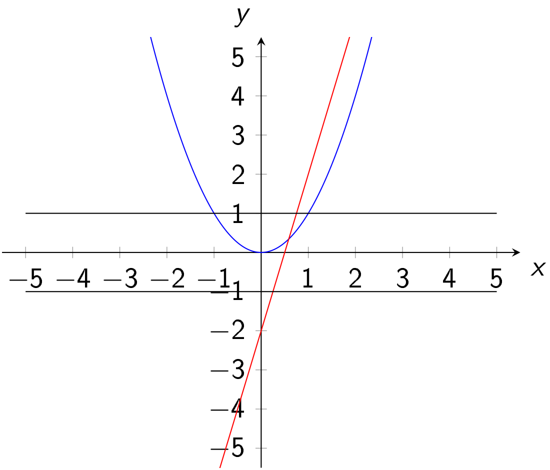
Definition

Wir nennen f *surjektiv*, falls jedes Element im Zielbereich im Bild von f ist, d.h. falls $f(D) = Z$ gilt.

Bemerkung

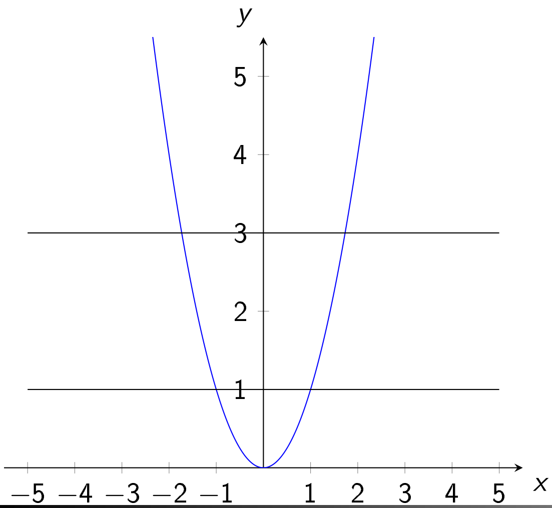
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Surjektivität der Funktion f, dass jede Parallele zur x-Achse mit einem Abstand $z \in Z$ den Graphen in mindestens einem Punkt trifft.

Surjektivität II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv, da kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$ existiert.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 2$ ist surjektiv.

Surjektivität III



- $f : \mathbb{R} \to [0; \infty),\ x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

Bijektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

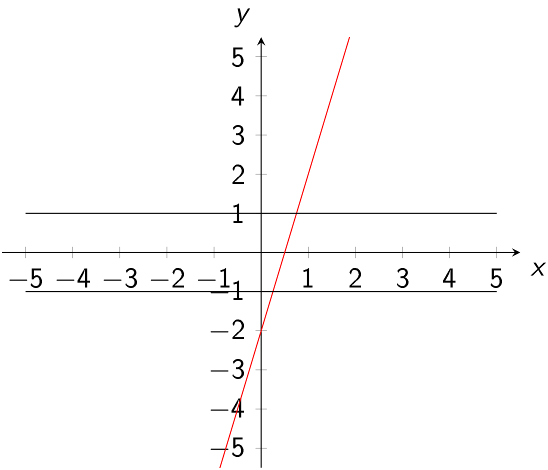
Definition

Wir nennen f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung

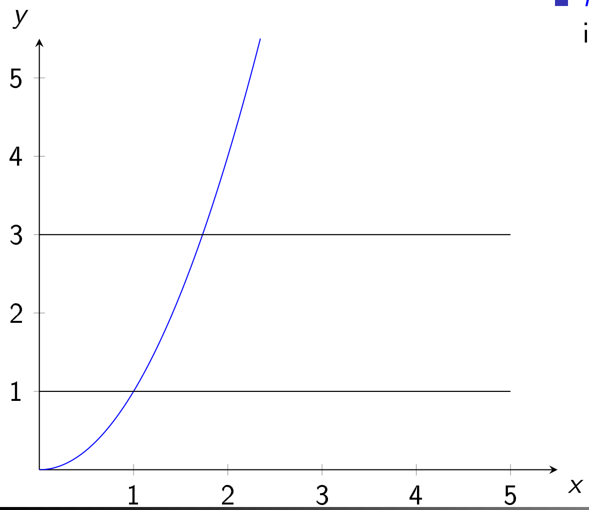
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Bijektivität der Funktion f, dass jede Parallele der x-Achse mit einem Abstand $z \in Z$ den Graphen in genau einem Punkt trifft.

Bijektivität II



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 4x - 2$ ist bijektiv.

Bijektivität III



- $f : [0; \infty) \to [0; \infty), \; x \mapsto x^2$ ist bijektiv.