Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

03.11.2017
(Stand: 02.11.2017, 23:25 Uhr)

Bijektivität IV

Seien D und Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Bemerkung

Falls f injektiv ist, so ist die Funktion $\tilde{f}\colon D \to f(D),\ x \mapsto f(x)$ bijektiv.

Beispiel

Seien $D = [0;\infty)$ und $Z = \mathbb{R}$ sowie $f\colon [0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann ist f injektiv und $f([0;\infty)) = [0;\infty)$, sodass

$$\tilde{f}\colon [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto x^2$$

bijektiv ist. (Vergleiche hierzu auch Vorlesung 2, Folie 31.)

Monotonie I

Seien $D, Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Wir nennen f

- *monoton wachsend*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt.

Monotonie II

Bemerkung

Ist f streng monoton fallend oder streng monoton steigend, so ist f auch injektiv.

Beispiel

- $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$ ist streng monoton steigend, da
$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0$$
für alle $x, y \in [0; \infty)$ mit $x < y$.
- $f : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$ ist streng monoton fallend.
- Allgemeiner: Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^n$ ist streng monoton steigend.

Verkettung I

Seien D_1, D_2 und Z_1, Z_2 Mengen sowie $f\colon D_1 \to Z_1$ und $g\colon D_2 \to Z_2$ zwei Funktionen.

Definition

Falls $f(D_1) \subseteq D_2$ gilt, so definieren wir

$$g \circ f\colon D_1 \to Z_2,\ x \mapsto g(f(x))$$

und nennen $g \circ f$ *die Verkettung von* g *und* f.

Bemerkung

Es gilt nicht

$$g \circ f = f \circ g,$$

da die rechte Seite nicht einmal definiert sein muss. Damit ist die Verkettung eine nichtkommutative, assoziative Verknüpfung.

Verkettung II

Beispiel

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g\colon (-\infty; 0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 1$. Dann ist $g \circ f$ nicht definiert, da $f(\mathbb{R}) = [0; \infty) \not\subseteq (-\infty; 0)$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$. Dann gilt

  $$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2,$$

  aber

  $$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(g(x)) = f(2x) = (2x) + 1 = 2x + 1.$$

  Damit sind $g \circ f$ und $f \circ g$ unterschiedlich.

Transformation in x-Richtung I

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D_2 \to Z$ eine Funktion sowie $a \in \mathbb{R}$.

Satz (Verschiebung)

Seien

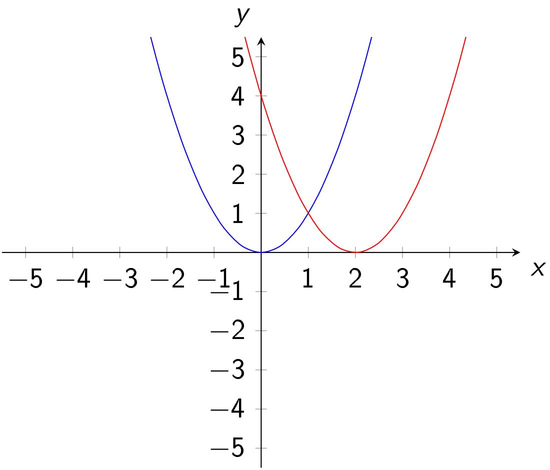
$$\tau_{-a}\colon D_1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - a$$

und es gelte $\tau_{-a}(D_1) \subseteq D_2$. Dann beschreibt die Funktion

$$f \circ \tau_{-a}\colon D_1 \to Z,\ x \mapsto f(x - a)$$

eine Verschiebung um a von f in x-Richtung.

Transformation in x-Richtung II



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- $g \circ \tau_{-2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-2)^2$

Transformation in x-Richtung III

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D_2 \to Z$ eine Funktion sowie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Satz (Stauchung, Streckung und Spiegelung)

Seien

$$\sigma_\alpha\colon D_1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha x$$

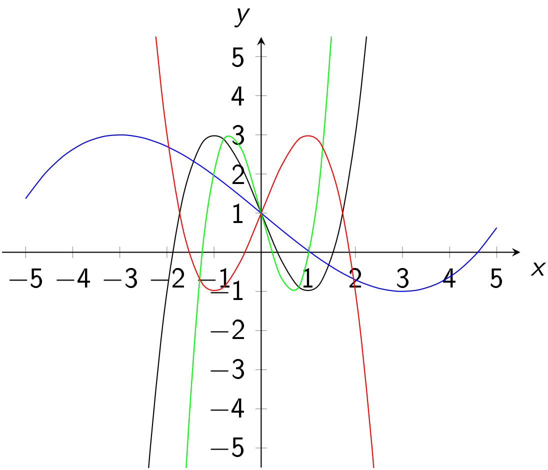
und es gelte $\sigma_\alpha(D_1) \subseteq D_2$. Dann beschreibt die Funktion

$$f \circ \sigma_\alpha\colon D_1 \to Z,\ x \mapsto g(\alpha x)$$

eine

- *Stauchung um α von f in x-Richtung, falls $\alpha > 1$,*
- *Streckung um α von f in x-Richtung, falls $0 < \alpha < 1$,*
- *Spiegelung von f an der y-Achse, falls $\alpha = -1$.*

Transformation in x-Richtung IV



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $f \circ \sigma_{1/3} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + 1 = \frac{1}{27}x^3 - x + 1$
- $f \circ \sigma_{3/2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{3}{2}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}x\right) + 1 = \frac{27}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 1$
- $f \circ \sigma_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (-x)^3 - 3(-x) + 1 = -x^3 + 3x + 1$

Umkehrfunktion I

Seien D und Z Mengen und $f: D \to Z$ eine bijektive Funktion.

Satz

Es existiert genau eine Funktion $g: Z \to D$, sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$$

für alle $x \in Z$ und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

für alle $x \in D$ gilt. In diesem Fall schreiben wir f^{-1} statt g und nennen $f^{-1}: Z \to D$ die Umkehrfunktion von f.

Achtung: Das Urbild existiert immer, eine Umkehrfunktion nicht.

Umkehrfunktion II

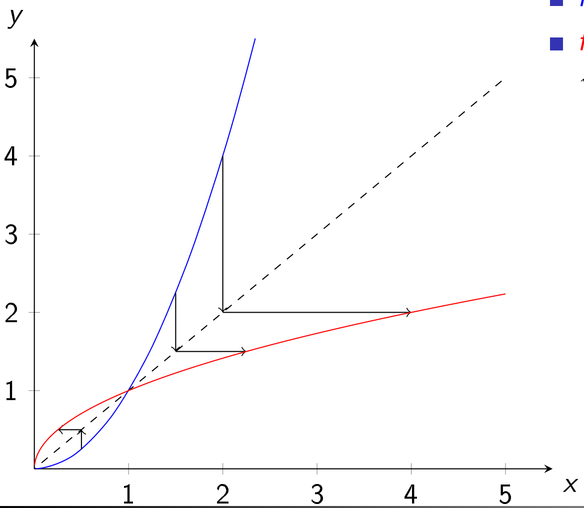
Bemerkung

Seien D und Z Mengen und $f: D \to Z$ eine Funktion. Dann ist f genau dann injektiv, wenn für jedes $y \in Z$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$ (Urbild!) höchstens einelementig ist.

Bemerkung

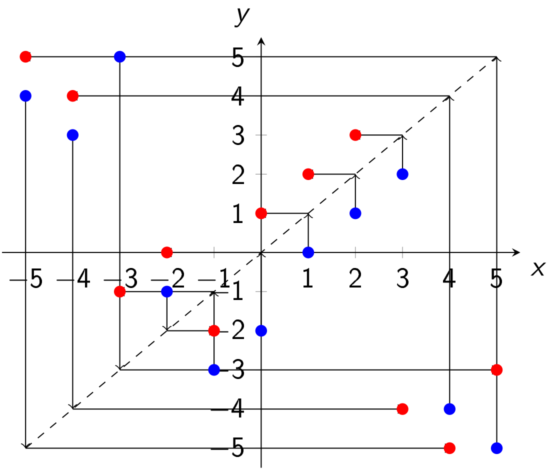
Falls $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ gilt, so kann f^{-1} graphisch durch eine Spiegelung von f an der 1. Winkelhalbierenden $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ gewonnen werden.

Umkehrfunktion III



- $f : [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto x^2$
- $f^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

Umkehrfunktion IV



- $f\colon \{-5,\dots,5\} \to \{-5,\dots,5\}$
- $f^{-1}\colon \{-5,\dots,5\} \to \{-5,\dots,5\}$

Umkehrfunktion V

Seien $D, Z \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to Z$ eine bijektive Funktion.

Frage

Wie kann man die Umkehrfunktion algebraisch bestimmen?

Antwort

Für $y \in D$ und $x \in Z$ lösen wir die Gleichung

$$x = f(y)$$

nach y auf.

Umkehrfunktion VI

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 7x - 14$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$x = 7y - 14$$

$(g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + 14)$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad g(x) &= g(7y - 14) \\
\Leftrightarrow (x) + 14 &= (7y - 14) + 14 \\
\Leftrightarrow \quad x + 14 &= 7y
\end{aligned}$$

Umkehrfunktion VII

Beispiel

$$x + 14 = 7y$$

$\left(h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{7}t\right)$

$$\Leftrightarrow h(x+14) = h(7y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7}(x+14) = \frac{1}{7}(7y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{7}x + 2 = y.$$

Also gilt

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{7}x + 2.$$

Umkehrfunktion VIII

Bemerkung

Seien D_1, D_2 und Z_1, Z_2 Mengen sowie $f: D_1 \to Z_1$ und $g: D_2 \to Z_2$ zwei bijektive Funktionen mit $f(D_1) = Z_2 = D_2$. Dann gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Umkehrfunktion IX

Beispiel

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 7x$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 14$. Dann gilt

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x)) = g(7x) = 7x - 14$$

und mit

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{7}x \quad \text{und} \quad g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 14$$

folgt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{7}(x + 14) = \frac{1}{7}x + 2.$$

Umkehrfunktion X

Beispiel

Wir wollen die Gleichung

$$5a - 8 = -2a + 6$$

für $a \in \mathbb{R}$ lösen. Es gilt

$$5a - 8 = -2a + 6$$

$$(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 8)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad f(5a - 8) &= f(-2a + 6) \\ \Leftrightarrow (5a - 8) + 8 &= (-2a + 6) + 8 \\ \Leftrightarrow \quad 5a &= -2a + 14 \end{aligned}$$

Umkehrfunktion XI

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&& 5a &= -2a + 14 \\
(g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 2a) && & \\
&\Leftrightarrow & g(5a) &= g(-2a + 14) \\
&\Leftrightarrow & (5a) + 2a &= (-2a + 14) + 2a \\
&\Leftrightarrow & 7a &= 14 \\
(h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{7}x) && & \\
&\Leftrightarrow & h(7a) &= g(14) \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{7}(7a) &= \frac{1}{7}14 \\
&\Leftrightarrow & a &= 2.
\end{aligned}
$$

Umkehrfunktion XII

Wir können die Gleichung auch folgendermaßen lösen:

$$5a - 8 = -2a + 6$$

$$\begin{aligned}
(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 2a - 6) \\
\Leftrightarrow \qquad f(5a - 8) &= f(-2a + 6) \\
\Leftrightarrow (5a - 8) + 2a - 6 &= (-2a + 6) + 2a - 6 \\
\Leftrightarrow \qquad 7a - 14 &= 0.
\end{aligned}$$

Umkehrfunktion XIII

Da $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 7x - 14$ bijektiv ist und $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{7}(x + 14)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} 5a - 8 &= -2a + 6 \\ \Leftrightarrow \quad 7a - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad g(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow g^{-1}(g(a)) &= g^{-1}(0) \\ \Leftrightarrow \quad a &= 2. \end{aligned}$$

Potenzen I

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} \text{ für alle } n > 0 \quad \text{und} \quad x^0 = 1.$$

Dabei nennen wir x *Basis*, n *Exponent* und x^n *Potenz*.

Rechenregeln

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $x^n y^n = (xy)^n$,
- $x^n x^m = x^{n+m}$,
- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Potenzen II

Die Rechenregeln der vorherigen Folie wollen wir nun auf $n, m \in \mathbb{Z}$ übertragen.

Beispiel

- Es gilt

$$3^4 \cdot \frac{1}{3^1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3^4}{3} = \frac{3^3 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{3^3}{1} = 3^3 = 3^{4-1}.$$

- Es gilt

$$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{2^3 \cdot 4^3} = \frac{1}{(2 \cdot 4)^3}.$$

Potenzen III

Definition

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad x^{-n} = (x^{-1})^n = \frac{1}{x^n}.$$

Rechenregeln

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

- $x^n y^n = (xy)^n$,
- $x^n x^m = x^{n+m}$,
- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Potenzen IV

Wir wissen, dass $f: [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto x^2$ die Umkehrfunktion $f^{-1}: [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$ besitzt. Da

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

und

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

für alle $x \in [0;\infty)$ gilt, ist es nach der letzten Rechenregel sinnvoll

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

für $x \in [0;\infty)$ zu setzen.

Potenzen V

Definition

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $f_n\colon [0;\infty) \to [0;\infty),\ x \mapsto x^n$. Wir definieren

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$$

für alle $x \in [0;\infty)$.

Rechenregeln

Seien $x, y \in (0;\infty)$ *und* $p, q \in \mathbb{Q}$. *Dann gilt:*

- $x^p y^p = (xy)^p$,
- $x^p x^q = x^{p+q}$,
- $(x^p)^q = x^{p\cdot q}$.

Exponentialfunktion I

Seien $x \in (0; \infty)$ und $r \in \mathbb{R}$. Man kann auch dem Ausdruck

$$x^r$$

Sinn verleihen, welcher im Fall eines rationalen Exponenten mit der Definition der vorherigen Folie übereinstimmt. Die Rechenregeln gelten auch für diesen Ausdruck.

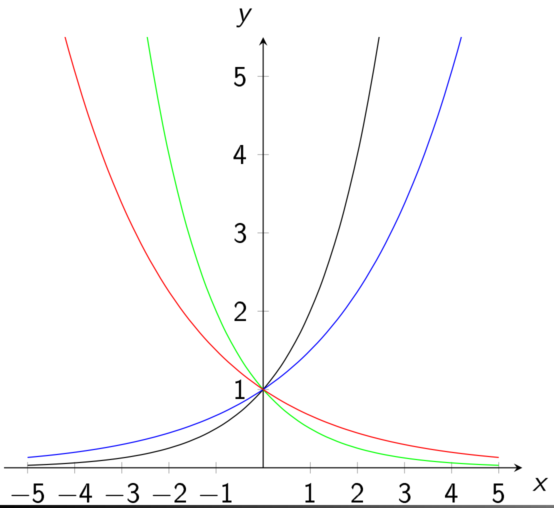
Definition

Sei $b \in (0; \infty) \setminus \{1\}$. Wir nennen die Funktion

$$b^\bullet : \mathbb{R} \to (0; \infty), \; x \mapsto b^x$$

die *Exponentialfunktion zur Basis b*.

Exponentialfunktion II



- $2^{\bullet}: \mathbb{R} \to (0;\infty),\ \ x \mapsto 2^x$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^{\bullet}: \mathbb{R} \to (0;\infty),\ \ x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{\bullet}: \mathbb{R} \to (0;\infty),\ \ x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{\bullet}: \mathbb{R} \to (0;\infty),\ \ x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Exponentialfunktion III

Bemerkung

Sei $b \in (0; \infty) \setminus \{1\}$. Es gilt:

- $b^\bullet$ ist
  - streng monoton fallend, falls $b < 1$,
  - streng monoton steigend, falls $b > 1$.

  Also ist $b^\bullet$ auch injektiv.
- $b^\bullet(\mathbb{R}) = (0; \infty)$.

Damit besitzt $b^\bullet$ eine Umkehrfunktion, die wir mit $\log_b$ bezeichnen, d.h.

$$\log_b = {b^\bullet}^{-1} : (0; \infty) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \log_b(x)$$

und nennen diese *Logarithmus zur Basis b*.

Exponentialfunktion IV

Rechenregeln

Seien $b \in (0;\infty) \setminus \{1\}$, $x, y \in (0;\infty)$ *und* $r \in \mathbb{R}$. *Es gilt:*

- $\log_b(1) = 0$,
- $\log_b(b) = 1$,
- $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$,
- $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$,
- $\log_b(x^r) = r\log_b(x)$.

Beispiel

- $\log_2(15) = \log_2(3 \cdot 5) = \log_2(3) + \log_2(5)$
- $\log_3(5^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\log_3(5)$

Exponentialfunktion V

Definition

Sei $e = 2,718\dots$ die Eulersche Zahl. Die Exponentialfunktion zur Basis e heißt auch *natürliche Exponentialfunktion*. Wir schreiben $\exp = e^{\bullet}$ und $\ln = \log = \log_e$ und nennen ln den *natürlichen Logarithmus*.

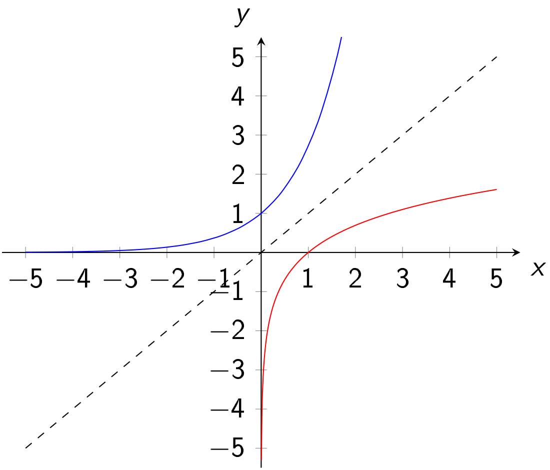
Achtung: Wenn wir im Folgenden von *der* Exponentialfunktion sprechen, so meinen wir immer die Exponentialfunktion bzgl. der Basis e. Gleiches gilt für den Logarithmus.

Rechenregeln

Seien $b \in (0;\infty) \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0;\infty)$. Es gilt:

- $b^x = \exp(x \ln(b))$,
- $\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$.

Exponentialfunktion VI



- $\exp : \mathbb{R} \to (0; \infty)$
- $\ln : (0; \infty) \to \mathbb{R}$