Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

10.11.2017
(Stand: 10.11.2017, 14:29 Uhr)

Einführung I

Wie viel Kilogramm Salzsäure der Konzentration 12% muss man mit wieviel Kilogramm der Konzentration 20% mischen, um 10 kg Salzsäure der Konzentration 15% zu erhalten? Wir setzen

$$x = \text{Masse der 12\%-igen Salzsäure in kg},$$
$$y = \text{Masse der 20\%-igen Salzsäure in kg}.$$

Die obige Frage lässt sich nun wie folgt umformulieren:
Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichungen (ohne kg)

$$x + y = 10 \qquad \text{(I)}$$
$$0,12x + 0,2y = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \qquad \text{(II)}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ aus?

Einführung II

Lösung (*Einsetzungsverfahren*)

- Wir formen (I) nach x um:

$$x = 10 - y. \qquad \text{(I')}$$

- Wir setzen (I') in (II) ein:

$$\begin{aligned} & 0,12(10-y) + 0,2y = 1,5 \\ \Leftrightarrow\ & 1,2 - 0,12y + 0,2y = 1,5 \\ \Leftrightarrow\ & 0,08y = 0,3 \\ \Leftrightarrow\ & y = 3,75. \end{aligned}$$

- Einsetzen von y in (I'): $x = 10 - 3,75 = 6,25$ (kg).

Einführung III

Lösung (Additionsverfahren)

- $(0,12) \cdot (I)$:

$$0,12x + 0,12y = 1,2 \qquad \text{(I')}$$

- $(II) - (I')$:

$$\begin{aligned} & (0,12x + 0,2y) - (0,12x + 0,12y) = 1,5 - 1,2 \\ \Leftrightarrow\ & 0,08y = 0,3 \\ \Leftrightarrow\ & y = 3,75 \end{aligned}$$

- In (I):

$$\begin{aligned} & x + 3,75 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & x = 6,25 \end{aligned}$$

Definition (Lineares Gleichungssystem)

Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$. Ein *lineares Gleichungssystem (LGS) der Größe* $m \times n$

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ sowie $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.
Das LGS heißt *homogen*, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$; inhomogen sonst.

Bemerkung

Mit der Notation aus der vorherigen Definition gilt für das einführende Beispiel: LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten sowie Koeffizienten

$$a_{1,1} = 1, \; a_{1,2} = 1, \; a_{2,1} = 0,12, \; a_{2,2} = 0,2$$

sowie

$$b_1 = 10 \quad \text{und} \quad b_2 = 1,5.$$

Beispiel

1. Wir betrachten das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, && \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2. && \text{(II)} \end{aligned}$$

Wir formen (I) nach x_1 um:

$$x_1 = 1 - x_2 \qquad \text{(I')}$$

und setzen (I') in (II) ein:

$$2(1 - x_2) + 2x_2 = 2 \Leftrightarrow 2 - 2x_2 + 2x_2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

d.h. für beliebiges $x_2 \in \mathbb{R}$ sind (I) und (II) wahr, wenn wir $x_1 = 1 - x_2$ setzen. Das LGS hat *unendlich viele Lösungen*.

Beispiel

2. Wir betrachten das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, && \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4. && \text{(II)} \end{aligned}$$

Wir formen (I) nach x_1 um:

$$x_1 = 1 - x_2 \qquad \text{(I')}$$

und setzen (I') in (II) ein:

$$2(1 - x_2) + 2x_2 = 4 \Leftrightarrow 2 - 2x_2 + 2x_2 = 4 \Leftrightarrow 2 = 4,$$

d.h. das LGS hat *keine Lösung*.

Definition (Lösung eines LSG)

Wir betrachten ein LGS wie in der Defintion auf Folie 5. Eine *Lösung* des LGS ist ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so dass $x_1, \ldots, x_n$ alle Gleichungen des LGS erfüllen. Die Menge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x \text{ ist eine Lösung des LGS}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt *Lösungsmenge* des LGS.
Wir nennen ein LGS *lösbar*, falls $\mathbb{L} \neq \emptyset$.
Wir nennen ein LGS *eindeutig lösbar*, falls $\mathbb{L}$ aus einem Element/Punkt besteht.
Wir nennen ein LGS *nicht lösbar*, falls $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel

1. Beispiel von Folie 2: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6,25 \\ 3,75 \end{pmatrix} \right\}$, d.h. das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.
2. Beispiel von Folie 7:
   $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$, d.h. das Gleichungssystem ist lösbar, aber nicht eindeutig, da z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{L}$ liegen. ($\mathbb{L}$ hat sogar unendlich viele Elemente.)
3. Beispiel von Folie 8: $\mathbb{L} = \emptyset$, d.h. das LGS ist nicht lösbar.

Ziel

Bereitstellung von Werkzeugen um die Lösungsmenge von LGSen zu bestimmen.

Definition

Wir schreiben das LGS von Folie 5 als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right).$$

Wir kürzen dies ab als $(A|b)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definition

Die Tabelle A bezeichnen wir als *Matrix mit m Zeilen und n Spalten* (*$(m \times n)$-Matrix*). Wir schreiben $\mathbb{R}^{m \times n}$ oder $M(m \times n)$ für die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen.

Für homogene LGS schreiben wir oft A statt $\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array} \right)$.

Beispiel

1. Beispiel von Folie 2:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &= 10 \\ 0,12x_1 + 0,2x_2 &= 1,5 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0,12 & 0,2 & 1,5 \end{array} \right)$$

Beispiel

2 Beispiel von Folie 7: $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

3 Beispiel von Folie 8: $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

4

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -2x_2 - x_4 &= 1 \\ 4x_4 &= 2 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 0x_1 + (-2)x_2 + 0x_3 + (-1)x_4 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir betrachten das LGS, das durch folgende Matrix gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right), \text{d.h.} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -2x_2 + 5x_3 &= 0, \\ -40x_3 &= -10. \end{aligned}$$

Dieses hat eine sehr einfache Struktur und ist daher leicht lösbar:

- $(III) \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.
- Einsetzen in (II) liefert: $-2x_2 + 5 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{8}$.
- Einsetzen in (I) liefert:
  $3x_1 + 5 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 4 \Leftrightarrow 3x_1 = 4 - \frac{25}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{8}$.

Somit gilt $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, d.h. das LGS ist eindeutig lösbar.

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat *Zeilenstufenform (ZSF)*, falls sie die Form

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h., wenn in jeder Zeile der erste von Null verschiedene Eintrag (von links gelesen) weiter rechts steht als der erste solche Eintrag in der Zeile darüber.

Bemerkung

Zeilen, deren Einträge alle 0 sind (sogenannte *Nullzeilen*), dürfen sich nur ganz unten in der Matrix befinden.
Ein LGS $(A|b)$ hat Zeilenstufenform, falls A Zeilenstufenform hat.

Beispiel

1. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ hat keine Zeilenstufenform.
2. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Zeilenstufenform.

Beispiel

3. Die Matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$ hat Zeilenstufenform.
4. Die Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$ hat Zeilenstufenform.
5. Die Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ hat keine Zeilenstufenform.
6. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ hat keine Zeilenstufenform.

Bemerkung

Bei linearen Gleichungssystemen in Zeilenstufenform kann sehr leicht ermittelt werden, ob eine Lösung existiert und diese auch bestimmt werden. Gegebenfalls müssen dazu eine oder mehrere Variablen „frei gewählt“ werden.

Beispiel

1. Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$
hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (vgl. Folie 15).

Beispiel

2. Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
entspricht ebenfalls dem LGS aus (1) (mit gleicher Lösungsmenge), da die zusätzliche Zeile „0=0“ keine Bedeutung hat.
3. Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ist nicht lösbar ($\mathbb{L} = \emptyset$), da die letzte Zeile „0=1“ bedeutet.

Beispiel

4. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

entspricht

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 40x_5 &= -10 \end{aligned}$$

und hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage

Kann man jedes LGS (ohne Änderung der Lösungsmenge!) auf Zeilenstufenform bringen?

Definition

Sei ein LGS $(A|b)$ gegeben. Unter elementaren Zeilenumformungen verstehen wir folgende Operationen:

1. Vertauschen zweier Zeilen.
2. Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.
3. Addieren einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

Bemerkung

Man kann zeigen, dass sich durch elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge eines LGS nicht ändert.

Satz (Gauß-Algorithmus)

Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.

Bemerkung

Dies ist zunächst nur eine Existenzaussage („es funktioniert"). Man kann aber explizit einen Algorithmus angeben, den wir uns im Folgenden an Beispielen klarmachen wollen.

Beispiel

Wir betrachten das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{array}\right).$$

- Zunächst multiplizieren wir jede Zeile mit 10 (damit wir mit ganzen Zahlen rechnen können) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir multiplizieren die erste Zeile mit 2 ($(I) \to 2(I)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

- Für die anderen Zeilen führen wir ähnliche Operationen durch ($(II) \to -6(II)$, $(III) \to -3(III)$ und $(IV) \to -3(IV)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir addieren zur zweiten Zeile die erste Zeile ($(II) \to (II) + (I)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

- Zu den anderen Zeilen addieren wir ebenfalls die erste Zeile ($(III) \to (III) + (I)$ und $(IV) \to (IV) + (I)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -12 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1 ($(III) \to (-1) \cdot (III)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -12 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

- Wir multiplizieren die vierte Zeile mit $-\frac{1}{2}$ ($(IV) \to (-\frac{1}{2}) \cdot (IV)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir addieren zur dritten Zeile die zweite Zeile ($(III) \to (III) + (II)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

- Wir addieren zur vierten Zeile die zweite Zeile ($(IV) \to (IV) + (II)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir tauschen die dritte und vierte Zeile ($(III) \leftrightarrow (IV)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Aus $-2x_3 = 1$ erhält man $x_3 = -\frac{1}{2}$ und damit aus $2 = -6x_2 - 4x_3 = -6x_2 + 2$, dass $x_2 = 0$ gilt. Schließlich folgt aus $8 = 6x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6x_1 + 0 - 1$, dass $x_1 = \frac{3}{2}$ gilt. Dies liefert die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

Wir können auch abkürzend einige elementare Zeilenumformungen zusammenfassen.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \to 2III + I} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV \to IV - II]{III \to III - 6II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV \to 10IV - 3III} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$