Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

17.11.2017
(Stand: 17.11.2017, 13:47 Uhr)

Übungen

- **Blatt 2**: Ausgabe: 10.11.2017, Abgabe: 17.11.2017, Übungen: 24.11.2017, 27.11.2017, 28.11.2017
- **Blatt 3**: Ausgabe: 24.11.2017, Abgabe: 01.12.2017, Übungen: 08.12.2017, 11.12.2017, 12.12.2017
- **Blatt 4**: Ausgabe: 15.12.2017, Abgabe: 22.12.2017, Übungen: 05.01.2018, 08.01.2018, 09.01.2018
- **Blatt 5**: Ausgabe: 05.01.2018, Abgabe: 12.01.2018, Übungen: 19.01.2018, 22.01.2018, 23.01.2018

Zwischenklausur

- **Freiwillig**
- **Ort und Zeit**: Hörsäle II & III, 15.12.2017, 12:15-13:45 Uhr
- **Anmeldung**: Name und Matrikelnummer an schillo (at) math.uni-sb.de bis einschließlich 13.12.2017.
- **Identifikation**: Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis mit.
- **Stoff**: Vorlesungsstoff bis einschließlich 3. Übungsblatt (24.11.2017)
- **Hilfmittel**: Einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt, kein Taschenrechner
- **Bestehen**: Ab 50%

Beispiel (LGS mit Parametern)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und betrachte das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Dieses LGS lässt sich wie folgt auf ZSF bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 2III - aI]{II \to II + I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & a & -2-a \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to 4III - aII} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & 2a+a^2 \end{array}\right)$$

Beispiel

Die 3. Zeile bedeutet

$$(4-a^2)x_3 = 2a + a^2 = a(2+a).$$

Wir müssen nun eine Fallunterscheidung machen, da

$$4 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ oder } a = -2$$

sein kann.

- $a = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$
  Also gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel

- $a = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
  Wir können also $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Dann gilt
  $0 = 4x_2 - 2x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$ und
  $1 = 2x_1 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_3)$, sodass

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+x_3) \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ;\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ;\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel

- $a \neq 2$ und $a \neq -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & 2a+a^2 \end{array}\right)$
  Die dritte Zeile ergibt

$$\begin{aligned} &(2-a)(2+a)x_3 = (4-a^2)x_3 = 2a + a^2 = a(2+a) \\ \Leftrightarrow &(2-a)x_3 = a \\ \Leftrightarrow &x_3 = \frac{a}{2-a}. \end{aligned}$$

  Damit erhalten wir

$$-2 - a = 4x_2 + ax_3 = 4x_2 + \frac{a^2}{2-a}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{4}\left(-2 - a - \frac{a^2}{2-a}\right) = -\frac{1}{2-a}.$$

Beispiel

- Schließlich folgt

$$\begin{aligned} 1 &= 2x_1 - x_3 = 2x_1 - \frac{a}{2-a} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{2-a}\right) = \frac{1}{2-a}, \end{aligned}$$

sodass

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2-a} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

Definition

Sei $(A|b)$ ein LGS wie auf Folie 5, Vorlesung 4.

1. Das LGS heißt *unterbestimmt*, falls $m < n$, d.h. weniger Gleichungen als Variablen zur Verfügung stehen.
2. Das LGS heißt *überbestimmt*, falls $m > n$, d.h. mehr Gleichungen als Varibalen zur Verfügung stehen.

Bemerkung

1. Ein unterbestimmtes LGS hat entweder keine Lösung oder man kann mindestens eine Variable frei wählen, d.h. das LGS hat unendlich viele Lösungen.
2. Ein homogenes LGS ist *immer* lösbar, denn $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ist immer eine Lösung. Die Lösungmenge kann aber auch unendlich viele Elemente enthalten.

Ziel

Wie groß ist die Lösungsmenge homogener LGS?

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösungen eines LGS $(A|b)$ maßgeblich von der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ abhängt. Im Folgenden werden wir daher Matrizen als eigenständige mathematische Objekte ansehen und für diese Rechenregeln aufstellen. Besonders wichtig wird dabei das Invertieren einer Matrix sein.

Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren wir die Abbildung

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots a_{m,n}x_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

Mit dieser Notation entspricht $(A|b)$ der Gleichung $A \cdot x = b$.

Mit der Notation

$$\mathbb{R}^{m\times n} \ni A = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n} = (a_{i,j})_{i,j}$$

ist die letzte Definition Ausgangspunkt der folgenden Definition.

Definition

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren

- *Skalares Vielfaches*: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{i,j})_{i,j} = (\alpha \cdot a_{i,j})_{i,j}$, sodass $\alpha \cdot f_A = f_{\alpha \cdot A}$
- *Summe*: $A + B = (a_{i,j})_{i,j} + (b_{i,j})_{i,j} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$, sodass $f_A + f_B = f_{A+B}$.

Frage

Gibt es auch eine Multiplikation von Matrizen?

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörigen Abbildungen

$$f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix},$$

$$f_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Definitionsbereiche (und Zielbereiche) von f_A und f_B verschieden sind, können wir $f_A \cdot f_B$ keinen Sinn verleihen.

Da jedoch das Bild von f_B in der Definitionsmenge von f_A liegt, können wir $f_A \circ f_B$ bilden. Für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned}
(f_A \circ f_B)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= f_A\left(f_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= f_A\left(\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1x_1 + 2x_2) + 5(3x_1 + 4x_2) + 3(5x_1 + 6x_2) \\ 3(1x_1 + 2x_2) + 2(3x_1 + 4x_2) + 4(5x_1 + 6x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 3\cdot 5)x_1 + (2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 3\cdot 6)x_2 \\ (3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5)x_1 + (3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 4\cdot 6)x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 3\cdot 5 & 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 & 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 4\cdot 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir also

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 3\cdot 5 & 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 & 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 32 & 42 \\ 29 & 38 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

so gilt

$$f_A \circ f_B = f_C.$$

Definition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Wir definieren

$$A \cdot B = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n} \cdot (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,l} = (c_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,l} = C \in \mathbb{R}^{m \times l}$$

mit

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, l$. Wir nennen C das *Matrixprodukt* von A und B und schreiben auch

$$C = A \cdot B.$$

Merkregel: $c_{i,j}$ entspricht „i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B“.

Bemerkung

Das Matrixprodukt $A \cdot B$ ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt!

Beispiel

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}$
- Hingegen ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Bemerkung

Die Funktion f_A ist eine *lineare Abbildung*, d.h. es gelten

1. $f_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$ und
2. $f_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha f_A(x)$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
In der linearen Algebra zeigt man, dass zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Matrix A existiert, sodass

$$f(x) = f_A(x) = A \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Mit dieser Bemerkung können wir einige geometrische Phänomene im $\mathbb{R}^n$ durch Matrizen beschreiben.

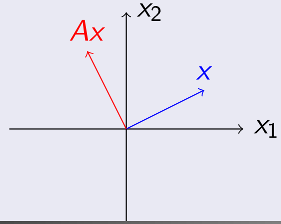
Beispiel

- Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

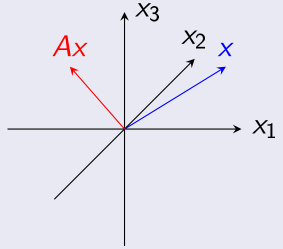
beschreibt eine Drehung um 90° (gegen den Uhrzeigersinn). Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt nämlich

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Beispiel

- Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
hingegen beschreibt eine Spiegelung eines Vektors an der x_2-x_3-Ebene:



Rechenregeln

1. $(A \cdot B)C = A \cdot (B \cdot C)$ *(passende Größen) (Assoziativ)*
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(passende Größen) (Distributiv)*
3. *Im Allgemeinen gilt* $A \cdot B \neq B \cdot A$.
   Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

Im Fall $m = n = 1$ reduziert sich ein LGS $(A|b)$ auf die Gleichung
$$a \cdot x = b.$$
Falls $a \neq 0$, wird die Gleichung von
$$x = \frac{1}{a} b = a^{-1} b$$
gelöst.
Finden wir im Fall $m \neq 1$ oder $n \neq 1$ eine Matrix A^{-1}, sodass
$$x = A^{-1} b?$$
Dies führt zu dem Begriff der inversen Matrix.

Definition

1. Mit
$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
   bezeichnen wir die *Einheitsmatrix der Größe n*.
2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$ gelten. B heißt dann *inverse Matrix* zu A und wir schreiben $B = A^{-1}$.

Bemerkung

- Für $A \in R^{n \times n}$ gilt immer $A \cdot E_n = A = E_n A$.
- Ist eine Matrix invertierbar, so ist ihre Inverse eindeutig bestimmt.
- Die Inverse von E_n ist E_n.
- Man braucht nur $A \cdot B = E_n$ *oder* $B \cdot A = E_n$ zu zeigen; die andere Gleichung folgt dann automatisch.
- Sind $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch $A \cdot C$ invertierbar mit
$$(A \cdot C)^{-1} = C^{-1} A^{-1}.$$
(Vergleiche hierzu auch Folie 18, Vorlesung 3.)

Beispiel

- Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um $90°$) ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um $-90°$), denn
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$
- Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an der x_2-x_3-Ebene) ist die Matrix selbst, denn
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Satz

1. *Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das zugehörige LGS* $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *nur die Lösung* $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *hat.*
2. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so hat jedes LGS der Form $Ax = b$ (bzw. $(A|b)$) genau eine Lösung! Diese ist gegeben durch $x = A^{-1}b$, also indem man die inverse Matrix von A auf b anwendet.*

Bemerkung

1. Ein homogenes LGS hat genau dann mehr als eine Lösung, wenn die Matrix *nicht* invertierbar ist.
2. Schaubild:

$$\begin{tikzcd} \text{Unbekannte } x_1, \ldots, x_n \arrow[r, bend right, "A"'] & \text{Koeffizienten } b_1, \ldots, b_n \arrow[l, bend right, "A^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Frage

1. Wann existiert eine Inverse?
2. Falls eine existiert, wie berechnet man sie?

Wir können elementare Zeilenumformungen durch invertierbare Matrizen darstellen.

Beispiel

Betrachte eine 3×3-Matrix.

1. Vertauschung von Zeile 1 und 3 entspricht der Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Die Operation $II \to (-3) \cdot II$ kann durch eine Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.
3. Die Operation $II \to II + I$ kann durch eine Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Beispiel

Die elem. Zeilenumformung $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

entspricht der Äquivalenzumformung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$