Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

6. Vorlesung, 24.11.2017
(Stand: 24.11.2017, 14:15 Uhr)

Verfahren

1. *Schreibe*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & & 1 \end{array}\right) \qquad ((A|E_n)).$$

2. *Führe den Gaußalgorithmus aus, sodass wir*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & * & * & * & * \\ & \ddots & & * & * & * \\ 0 & & d_n & * & * & * \end{array}\right)$$

erhalten. Hierbei werden die Zeilenumformungen auch auf der rechten Seite einfach mitausgeführt. Die Matrix auf der linken Seite hat jetzt die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix.

Verfahren

3. *Ist ein $d_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, so ist A nicht invertierbar. Andernfalls: Fahre mit Zeilenumformungen fort bis wir*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{array}\right) \qquad ((E_n|B))$$

erhalten. Die Matrix B auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix zu A.

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III + I]{II \to 3II - 2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Da $-3, -2$ und 2 verschieden von 0 sind, ist die Matrix A auf der linken Seiten invertierbar.)

$$\xrightarrow[II \to II - III]{I \to I - III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I \to 2I + II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel

$$\xrightarrow[III \to \frac{1}{2} III]{I \to (-\frac{1}{6}) I \atop II \to (-\frac{1}{2}) II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Auf der rechten Seite steht nun A^{-1}.

Frage

Gibt es noch weitere Möglichkeiten die Invertierbarkeit einer Matrix zu überprüfen?

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$ax = 0$$

mit dem Koeffizient $a \in \mathbb{R}$ und der Variable $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die (1×1)-Matrix $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ genau dann invertierbar, d.h. das LGS hat eine eindeutige Lösung, wenn $a \neq 0$.

Definition

Wir definieren für eine (1×1)-Matrix $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$\det(A) = a$$

und nennen $\det(A)$ die *Determinante von A*.

Erinnerung

Unter einer elementaren Zeilenumformung haben wir die drei folgenden Operationen verstanden.

- Vertauschen zweier Zeilen.
- Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.
- Addieren eines Vielfachen einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + cx_2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und Variablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a \neq 0$: Wir führen den Gaußalgorithmus aus:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - \frac{c}{a} I} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{d\cdot a - c\cdot b}{a} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn $a \neq 0$ und $\frac{d\cdot a - c\cdot b}{a} \neq 0$ gilt. Die letzte Bedingung lässt sich zu $a \cdot \frac{d\cdot a - c\cdot b}{a} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ zusammenfassen.

- $a = 0$: Wir machen eine weitere Fallunterscheidung:
  - $c = 0$: In diesem Fall können wir $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen, d.h. die Matrix ist nicht invertierbar.
  - $c \neq 0$: Wir tauschen die erste und zweite Zeile und führen wieder den Gaußalgorithmus aus:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - \frac{a}{c} I} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\frac{a \cdot d - b \cdot c}{c} \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, dass die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn

$$c \cdot \left(-\frac{a \cdot d - b \cdot c}{c} \right) = -(a \cdot d - b \cdot c) \neq 0$$

gilt.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine (2×2)-Matrix.

Definition

Wir definieren

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

und nennen $\det(A)$ die *Determinante von A*.

Satz

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $e, f \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\det\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

   und

   $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}\right).$

Satz

2. $\det\left(\begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha \det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{pmatrix}\right)$, *d.h., wenn wir eine Zeile mit α multiplizieren, so ändert sich die Determinante um α.*
3. $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -\det\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right)$, *d.h., wenn wir zwei Zeilen vertauschen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.*
4. $\det(E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$
5. *Die Operationen $I \to I + \alpha II$ und $II \to II + \alpha I$ lassen die Determinante unverändert.*

Satz

6. *Ist $c = 0$, so gilt $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = a \cdot d$, d.h. die Determinante ist das Produkt der Diagonaleinträge bei einer oberen Dreiecksmatrix.*
7. *A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.*

Wir wissen also nun wie sich die Determinante bei elementaren Zeilenumformungen (und damit beim Gaußalgorithmus) verhält.

Beispiel

Ist das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar? Ja, denn

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1\cdot 2 - 4\cdot 3 = 2 - 12 = -10 \neq 0.$$

Da es sich um ein homogenes LGS handelt, gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um uns eine Determinante für (3×3)-Matrizen zu überlegen, führen wir den Gaußalgorithmus aus, wobei wir zur Einfachheit annehmen, dass wir immer teilen dürfen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow[III\to III - \frac{g}{a}I]{II\to II - \frac{d}{a}I} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ea-db}{a} & \frac{fa-dc}{a} \\ 0 & \frac{ha-gb}{a} & \frac{ia-gc}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III\to III - \frac{ha-gb}{ea-db}II} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ea-db}{a} & \frac{fa-dc}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a\cdot e\cdot i+b\cdot f\cdot g+c\cdot d\cdot h-g\cdot e\cdot c-h\cdot f\cdot a-i\cdot d\cdot b}{ea-db} \end{pmatrix}.$$

Definition

Wir definieren

$$\det(A) = a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - g\cdot e\cdot c - h\cdot f\cdot a - i\cdot d\cdot b.$$

Diese Definition erfüllt die analogen Aussagen aus dem Satz von den Folien 10-12. Wie kann man sich diese Formel merken?

Satz (Regel von Sarrus)

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$\det(A) = a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - g\cdot e\cdot c - h\cdot f\cdot a - i\cdot d\cdot b$$

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt nur(!) für (3×3)-Matrizen!

Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) =& 1\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 6\cdot 2 \\ & - 0\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot 6\cdot 3 \\ =& -4 + 36 - 72 = -40 \end{aligned}$$

Frage

Gibt es auch eine Determinante für $(n \times n)$-Matrizen für $n \geq 4$?

Antwort

Ja, es gibt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ eine eindeutige(!) Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, sodass die Bedingungen 1-4 aus dem Satz von Folien 10-12 erfüllt sind. Die Eigenschaften 5-7 folgen daraus.

Bemerkung

Nach der Eigenschaft 6 reicht es, wenn wir eine Matrix mit Hilfe des Gaußalgorithmus auf eine obere Dreiecksmatrix bringen, da wir dann als Determinante das Produkt der Diagonaleinträge haben.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV \to IV - I]{\substack{II \to II + I \\ III \to III - 3I}} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -9 & -14 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV \to {\color{red}3} IV + II]{III \to III + II} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV \to {\color{blue}2} IV + III} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$336 = 1 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-14) = \det(A_3) = {\color{blue}2} \det(A_2) = {\color{blue}2} \cdot {\color{red}3} \det(A_1)$$
$$= {\color{blue}2} \cdot {\color{red}3} \det(A) \qquad \Leftrightarrow \det(A) = 56$$

Rechenregeln

1. *Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebige Matrizen, so ist* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$ und* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Der folgende Satz fasst die Ergebnisse über die Inverse Matrix und die Eindeutigkeit der Lösung eines LGS zusammen

Satz

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent (d.h., wenn eine Bedingung gilt, dann gelten alle; gilt eine Bedingung nicht, dann gilt keine):

1. $\det(A) \neq 0$.
2. *A ist invertierbar.*
3. *Das homogene LGS* $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *hat nur die Lösung* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. *Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = A^{-1}b$.*

Beispiel

1. Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ invertierbar? Nach Folie 16 ist $\det(A) = -40 \neq 0$, also invertierbar.
2. Betrachte das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 6x_1 - x_2 &= 0, \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da es sich im ein homogenes LGS handelt, wissen wir, dass $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ immer eine Lösung ist. Gibt es weitere? Da A aus Teil 1 die zugehörige Matrix ist, folgt aus der Invertierbarkeit von A die Eindeutigkeit.

Beispiel

3. Betrachte das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 6x_1 - x_2 &= 2, \\ 2x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Besitzt dieses eine Lösung? Wenn ja, ist diese eindeutig? Nach Teil 1 ist die zugehörige Matrix invertierbar. Also ist das LGS eindeutig lösbar mit $x = A^{-1}b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Um die Lösung zu erhalten, muss man aber A^{-1} bestimmen.

Beispiel

4. Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

lösbar? (Vergleiche Folie 4, Vorlesung 5). Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sodass

$$\det(A) = 0 + 0 + 4 + a^2 - 8 - 0 = a^2 - 4.$$

Beispiel

Ist $a = 2$ oder $a = -2$, so ist $\det(A) = 0$; das LGS hat also entweder keine oder unendlich viele (vgl. Lösungen auf Folie 5 & 6, Vorlesung 5). Für $a \neq 2$ und $a \neq -2$ ist $\det(A) \neq 0$, also ist das LGS eindeutig lösbar (vgl. Lösung auf Folie 8, Vorlesung 5).

Gibt es eine weitere Methode um die Determinante „großer“ Matrizen zu berechnen?

Notation

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ schreiben wir $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ für die Matrix, die durch das Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A entsteht.

Beispiel

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz (Laplacescher Entwicklungssatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. *Entwicklung nach der i-ten Zeile:*

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det(A_{i,n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

2. *Entwicklung nach der j-ten Spalte:*

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(A_{1,j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Bemerkung

1. Die Vorzeichen ($(-1)^{i+j}$) kann man sich anhand der folgenden Tabelle merken (Schachbrettmuster):

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

(Oben links ist immer $+$ und dann immer abwechselnd.)

Bemerkung

2. Es ist sinnvoll nach einer Zeile oder Spalte zu entwickeln, die viele Nullen entählt.
3. Die Zahl $a_{i,j}$ ist genau die Zahl, die beim Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte „gekreuzt“ wird.

Beispiel

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

- Wir wählen eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen. Hier bietet sich die 3. Zeile oder die 3. Spalte an. Wir wählen die 3. Zeile.
- Wir berechnen

$$\det(A_{3,1}) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= -7.$$

Beispiel

- Wir merken uns $a_{3,1} = 2$.
- Ebenso berechnen wir

$$\det(A_{3,2}) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= -5$$

  und merken uns $a_{3,2} = 4$.
- Die Determinanten $\det(A_{3,3})$ und $\det(A_{3,4})$ müssen wir nicht berechnen, da $a_{3,3} = a_{3,4} = 0$.
- Schließlich folgt

$$\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot (-7) + (-1)^{3+2} \cdot 4 \cdot (-5) + 0 + 0 = 6.$$