# Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

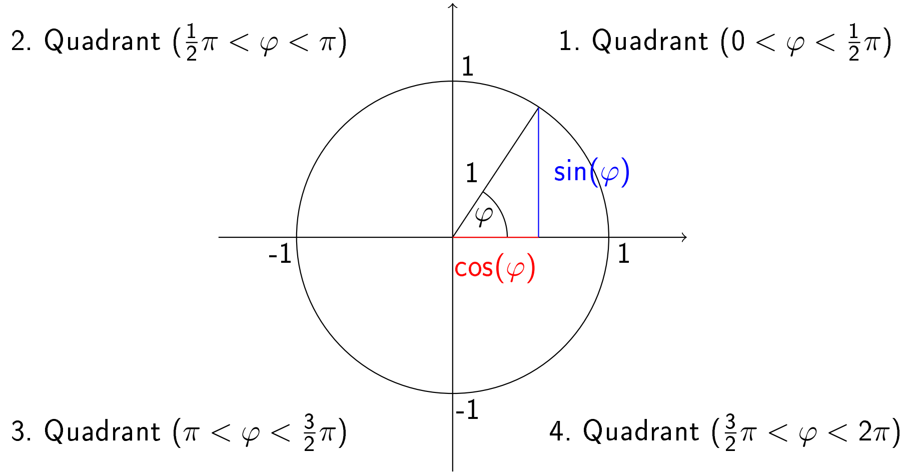
Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

8. Vorlesung, 08.12.2017
(Stand: 08.12.2017, 14:30 Uhr)








Achtung: Wir geben Winkel immer im Bogenmaß an! ($180° \widehat{=} \pi$)



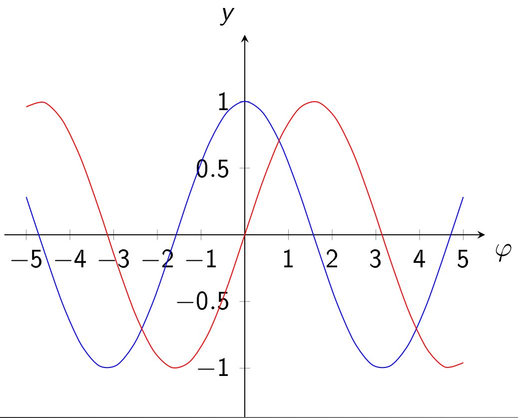


## Definition

Die Funktionen

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \sin(\varphi)$$

nennen wir *Cosinus* bzw. *Sinus*.








## Bemerkung

- Die Funktionen sin und cos sind $2\pi$-periodisch, d. h. es gilt
  $$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$$
  für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Nach dem Satz des Pythagoras gilt
  $$\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$$
  für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Es gilt
  $$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$
  sowie
  $$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)$$
  für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

# Wichtige Werte von Cosinus und Sinus

| $\varphi$ | $\cos(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{1}{2}\pi$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{2}{3}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{3}{4}\pi$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\frac{5}{6}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\pi$ | $-1$ | $0$ |

| $\varphi$ | $\cos(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ |
|---|---|---|
| $\pi$ | $-1$ | $0$ |
| $\frac{7}{6}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\frac{5}{4}\pi$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\frac{4}{3}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{3}{2}\pi$ | $0$ | $-1$ |
| $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\frac{11}{6}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $2\pi$ | $1$ | $0$ |



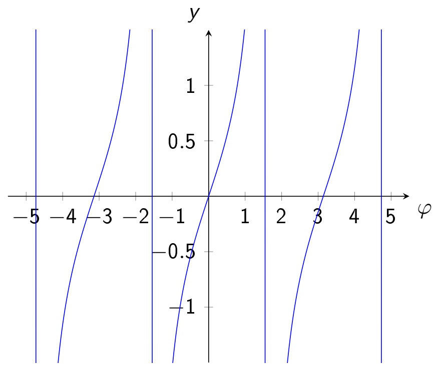


**Definition**

Die Funktion

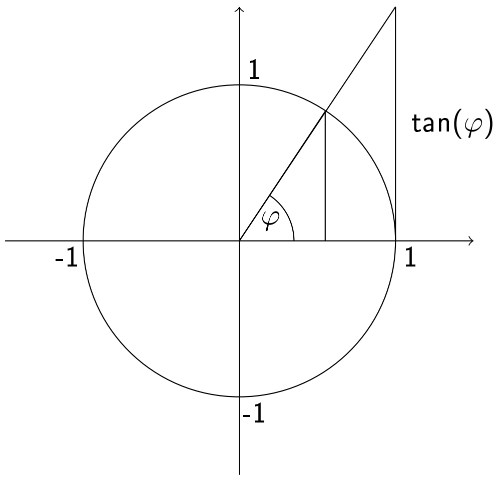
$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

nennen wir *Tangens*.







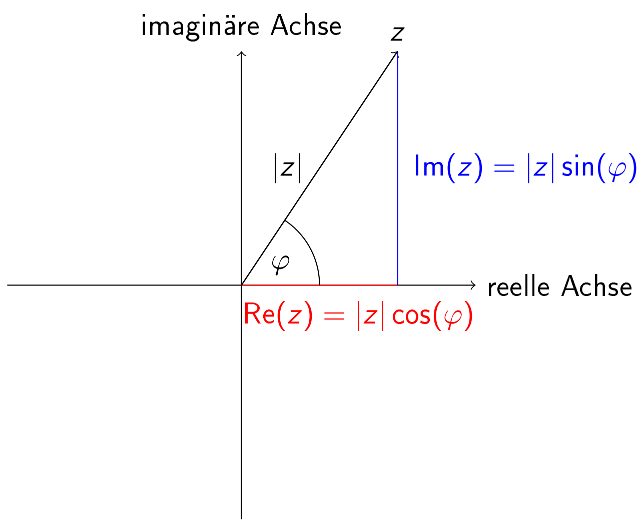








# Wichtige Werte von Cosinus, Sinus und Tangens

| $\varphi$ | $\cos(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ | $\tan(\varphi)$ | $\varphi$ | $\cos(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ | $\tan(\varphi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\pi$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $1$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $1$ |
| $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{1}{2}\pi$ | $0$ | $1$ | / | $\frac{3}{2}\pi$ | $0$ | $-1$ | / |
| $\frac{2}{3}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\frac{3}{4}\pi$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| $\frac{5}{6}\pi$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\pi$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $2\pi$ | $1$ | $0$ | $0$ |








## Satz

*Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. Dann existiert ein Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) \\ &= |z|\cos(\varphi) + i\,|z|\sin(\varphi) \\ &= |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

*Wir können sogar $\varphi \in [0; 2\pi)$ erreichen, sodass $\varphi$ eindeutig ist.*

## Bemerkung

Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ liegt genau dann im

- 1. Quadranten, wenn $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$,
- 2. Quadranten, wenn $\mathrm{Re}(z) < 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$,
- 3. Quadranten, wenn $\mathrm{Re}(z) < 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$,
- 4. Quadranten, wenn $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$.





## Definition (Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

## Bemerkung

- Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$e^{z+w} = e^z e^w.$$
- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$
- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$.





## Definition

Ist $z \neq 0$, so nennen wir

$$z = |z|\,e^{i\varphi} = |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in [0; 2\pi)$ der eindeutige Winkel von Folie 10 ist, die *Polardarstellung von $z$*. Der Winkel $\varphi$ wird auch als *Argument von $z$*, in Zeichen $\arg(z) = \varphi$, bezeichnet.

## Bemerkung

Ist $z \neq 0$, so lässt sich das Argument $\varphi$ von $z$ durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{oder} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

bestimmen. Hierbei muss aber zusätzlich der Quadrant beachtet werden, da z. B. $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{7}{4}\pi)$ gilt.

## Beispiel

1. Betrachte $z = 1 + i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ in Frage (siehe Tabelle auf Folie 8). Da $\mathrm{Re}(z) = 1 > 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$ gilt, liegt $z$ im 1. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Damit erhalten wir
$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right).$$
2. Betrachte $z = i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ und $\cos(\varphi) = \frac{0}{1} = 0$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ in Frage. Da $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$, folgt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Damit erhalten wir
$$z = i = 1e^{i\frac{1}{2}\pi} = 1\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right).$$





## Beispiel

3. Betrachte $z = -2 + 2i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ in Frage. Da $\mathrm{Re}(z) = -2 < 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 2 > 0$, liegt $z$ im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ folgt. Damit erhalten wir
$$z = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$





## Rechenregeln

*Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = |z|\, e^{i\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ und $w = |w|\, e^{i\psi}$ $(\psi \in \mathbb{R})$.*

1. *Es gilt*
$$z \cdot w = |z|\,|w|\, e^{i(\varphi+\psi)} = |z|\,|w|\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)),$$
*d. h. das Multiplizieren entspricht dem Multiplizieren der Beträge und dem Addieren der Winkel.*
2. *Sei $w \neq 0$. Es gilt*
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)),$$
*d. h. das Dividieren entspricht dem Dividieren der Beträge und der Subtraktion der Winkel. Insbesondere gilt*
$$w^n = |w|^n\, e^{in\psi}$$
*für alle $n \in \mathbb{Z}$.*





## Beispiel

1. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi}$. Also
$$z \cdot w = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}\sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{16}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)} = 4e^{i\pi} = -4.$$
2. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Dann gilt
$$z^4 = \sqrt{2}^4\, e^{i4\cdot\frac{1}{4}\pi} = 4e^{i\pi} = -4.$$
3. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = i = e^{\frac{1}{2}\pi}$. Dann gilt
$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{2}\pi}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+2\pi\right)}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

**Bemerkung**

Sei $0 \neq z = |z|\, e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{z} &= |z|\, e^{-i\varphi} = |z|\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|\,(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))\\ &= |z|\, e^{i(2\pi-\varphi)} = |z|\,(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)).\end{aligned}$$

**Beispiel**

Sei $z = -2 + \sqrt{12}i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Da $\mathrm{Re}(z) = -2 < 0$ und $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{12} > 0$ gilt, liegt $z$ im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Also $z = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Damit folgt

$$\overline{z} = 4e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} = 4e^{i\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi\right)} = 4e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$





Wir haben bereits gesehen, dass $i$ die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

löst.

**Frage**

Ist jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ lösbar?





Sei

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ eine quadratische Gleichung. Wir gehen vor wie in Vorlesung 7:

- Teilen durch $a$ und quadratische Ergänzung ergibt
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$
- Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
  1. $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$: Die (doppelte) Lösung ist
$$z = -\frac{b}{2a}.$$





- 2. $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \neq 0$: Schreibe diesen Term in Polardarstellung, d. h.
$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = re^{i\varphi}.$$
Dann sind
$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a},\\ z_2 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} - \frac{b}{2a} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a}\end{aligned}$$
die Lösungen der Gleichung.
Achtung: Die *abc*-Formel oder *pq*-Formel sind nur anwendbar, wenn $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \in \mathbb{R}$ und $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$!

### Beispiel

1. Betrachte $z^2+2z+(3-\sqrt{12}i)=0$. Dann gilt $a=1, b=2, c=3-\sqrt{12}i$.
   1. $\left(z+\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2=(z+1)^2=-\frac{3-\sqrt{12}i}{1}+\left(\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2=-2+\sqrt{12}i=4e^{i\frac{2}{3}\pi}\neq 0.$
   2. Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2e^{i\frac{2}{6}\pi}-1=2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)-1\\
&= 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1=\sqrt{3}i,\\
z_2 &= -2e^{i\frac{2}{6}\pi}-1=-2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)-1\\
&= -2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1=-2-\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$





### Beispiel

2. Betrachte $z^2+2z+5=0$. Dann gilt $a=1, b=2, c=5$.
   1. $\left(z+\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2=(z+1)^2=-\frac{5}{1}+\left(\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2=-4=4e^{i\pi}\neq 0.$
   2. Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2e^{i\frac{1}{2}\pi}-1=2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)-1\\
&= 2\,(0+i)-1=-1+2i,\\
z_2 &= -2e^{i\frac{1}{2}\pi}-1=-2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)-1\\
&= -2\,(0+i)-1=-1-2i.
\end{aligned}$$





### Bemerkung

Sind $a, b, c\in\mathbb{R}$ und $z\in\mathbb{C}$ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$az^2+bz+c=0,$$

dann ist auch $\overline{z}$ eine Lösung.

### Beispiel

$z=-1+2i$ ist eine Lösung von

$$z^2+2z+5=0.$$

Damit ist $\overline{z}=-1-2i$ ebenfalls eine Lösung.





### Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

*Seien $n\in\mathbb{N}^*$ und $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$, sodass für mindestens ein $a_i\neq 0$ $(i=1,\ldots,n)$ gilt. Dann besitzt das (nichtkonstante) Polynom*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

*eine Nullstelle.*