



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

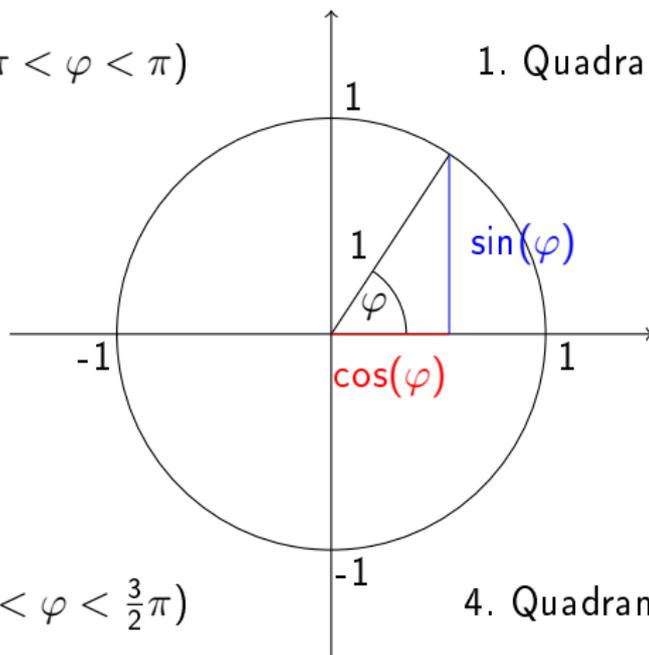
Universität des Saarlandes

8. Vorlesung, 08.12.2017
(Stand: 08.12.2017, 14:30 Uhr)



2. Quadrant ($\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$)

1. Quadrant ($0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$)



3. Quadrant ($\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$)

4. Quadrant ($\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$)

Achtung: Wir geben Winkel immer im Bogenmaß an! ($180^\circ \hat{=} \pi$)

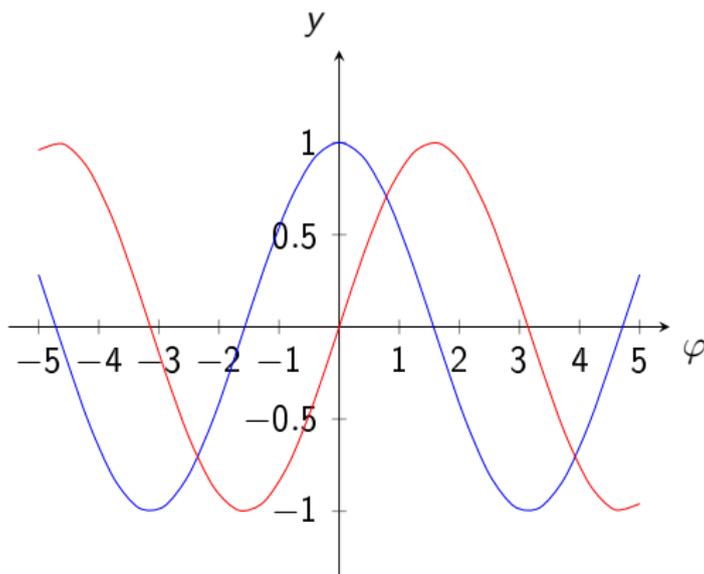


Definition

Die Funktionen

$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \cos(\varphi)$ und $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \sin(\varphi)$

nennen wir *Cosinus* bzw. *Sinus*.





Bemerkung

- Die Funktionen \sin und \cos sind 2π -periodisch, d. h. es gilt

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

- Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

- Es gilt

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

sowie

$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.



Wichtige Werte von Cosinus und Sinus

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$
0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

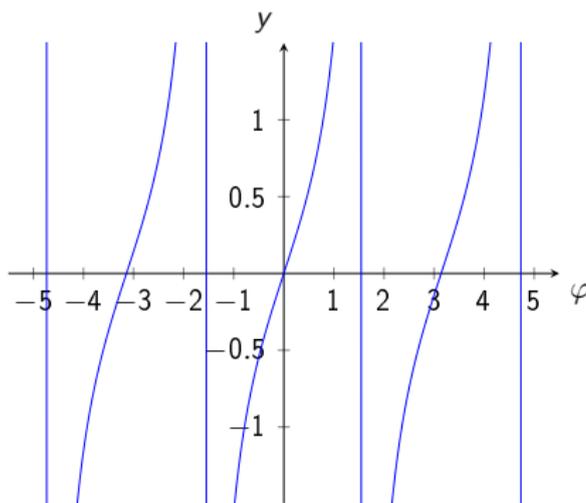
φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$
π	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	1	0

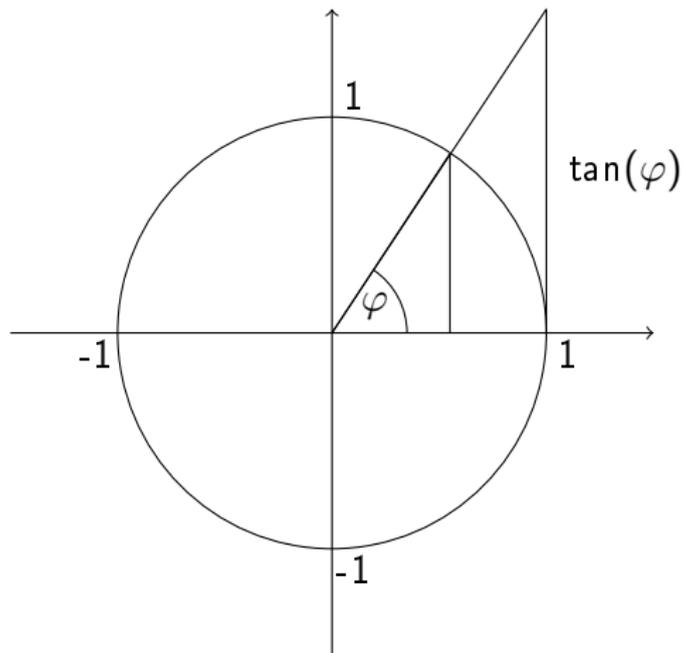
Definition

Die Funktion

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

nennen wir *Tangens*.

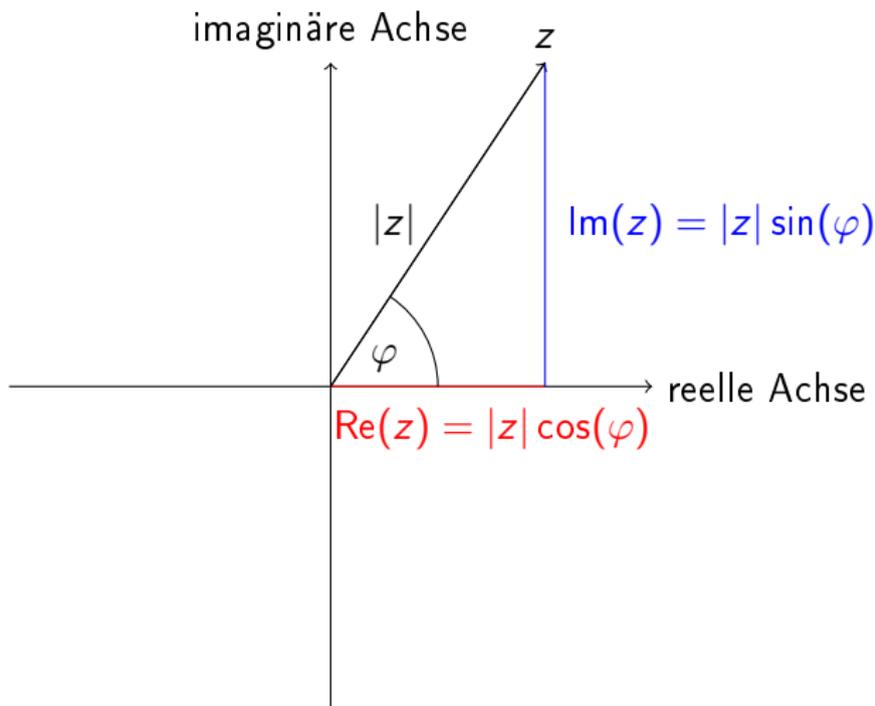






Wichtige Werte von Cosinus, Sinus und Tangens

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi)$	φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0	1	0	0	π	-1	0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	/	$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	/
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	-1	0	0	2π	1	0	0



Satz

Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. Dann existiert ein Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned}z &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \\ &= |z| \cos(\varphi) + i |z| \sin(\varphi) \\ &= |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).\end{aligned}$$

Wir können sogar $\varphi \in [0; 2\pi)$ erreichen, sodass φ eindeutig ist.

Bemerkung

Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ liegt genau dann im

- 1. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$,
- 2. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$,
- 3. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$,
- 4. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$.



Definition (Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

Bemerkung

- Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$.



Definition

Ist $z \neq 0$, so nennen wir

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in [0; 2\pi)$ der eindeutige Winkel von Folie 10 ist, die *Polardarstellung von z* . Der Winkel φ wird auch als *Argument von z* , in Zeichen $\arg(z) = \varphi$, bezeichnet.

Bemerkung

Ist $z \neq 0$, so lässt sich das Argument φ von z durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{oder} \quad \sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

bestimmen. Hierbei muss aber zusätzlich der Quadrant beachtet werden, da z. B. $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{7}{4}\pi)$ gilt.



Beispiel

- 1** Betrachte $z = 1 + i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ in Frage (siehe Tabelle auf Folie 8). Da $\operatorname{Re}(z) = 1 > 0$ und $\operatorname{Im}(z) = 1 > 0$ gilt, liegt z im 1. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Damit erhalten wir

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right).$$

- 2** Betrachte $z = i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ und $\cos(\varphi) = \frac{0}{1} = 0$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ in Frage. Da $\operatorname{Re}(z) = 0$ und $\operatorname{Im}(z) = 1 > 0$, folgt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Damit erhalten wir

$$z = i = 1e^{i\frac{1}{2}\pi} = 1 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \right).$$

Beispiel

- 3** Betrachte $z = -2 + 2i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ in Frage. Da $\operatorname{Re}(z) = -2 < 0$ und $\operatorname{Im}(z) = 2 > 0$, liegt z im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ folgt. Damit erhalten wir

$$z = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right).$$

Rechenregeln

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = |z| e^{i\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) und $w = |w| e^{i\psi}$ ($\psi \in \mathbb{R}$).

1 Es gilt

$$z \cdot w = |z| |w| e^{i(\varphi+\psi)} = |z| |w| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)),$$

d. h. das Multiplizieren entspricht dem Multiplizieren der Beträge und dem Addieren der Winkel.

2 Sei $w \neq 0$. Es gilt

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)),$$

d. h. das Dividieren entspricht dem Dividieren der Beträge und der Subtraktion der Winkel. Insbesondere gilt

$$w^n = |w|^n e^{in\psi}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.



Beispiel

- 1** Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi}$.

Also

$$z \cdot w = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{16}e^{i(\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi)} = 4e^{i\pi} = -4.$$

- 2** Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Dann gilt

$$z^4 = \sqrt{2}^4 e^{i4 \cdot \frac{1}{4}\pi} = 4e^{i\pi} = -4.$$

- 3** Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = i = e^{i\frac{1}{2}\pi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{2}\pi}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{1}{4}\pi)} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{1}{4}\pi + 2\pi)} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}. \end{aligned}$$

Bemerkung

Sei $0 \neq z = |z| e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\bar{z} &= |z| e^{-i\varphi} = |z| (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = |z| (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) \\ &= |z| e^{i(2\pi - \varphi)} = |z| (\cos(2\pi - \varphi) + i \sin(2\pi - \varphi)).\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $z = -2 + \sqrt{12}i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{16} = 4$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Da $\operatorname{Re}(z) = -2 < 0$ und $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{12} > 0$ gilt, liegt z im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Also $z = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Damit folgt

$$\bar{z} = 4e^{i(-\frac{2}{3}\pi)} = 4e^{i(2\pi - \frac{2}{3}\pi)} = 4e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass i die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

löst.

Frage

Ist jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ in \mathbb{C} lösbar?



Sei

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ eine quadratische Gleichung. Wir gehen vor wie in Vorlesung 7:

- Teilen durch a und quadratische Ergänzung ergibt

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1 $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$: Die (doppelte) Lösung ist

$$z = -\frac{b}{2a}.$$

- 2 $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \neq 0$: Schreibe diesen Term in Polardarstellung, d. h.

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = re^{i\varphi}.$$

Dann sind

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a},$$

$$z_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} - \frac{b}{2a} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a}$$

die Lösungen der Gleichung.

Achtung: Die *abc*-Formel oder *pq*-Formel sind nur anwendbar, wenn $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \in \mathbb{R}$ und $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$!

Beispiel

- 1 Betrachte $z^2 + 2z + (3 - \sqrt{12}i) = 0$. Dann gilt
 $a = 1, b = 2, c = 3 - \sqrt{12}i$.

1 $(z + \frac{2}{2 \cdot 1})^2 = (z + 1)^2 = -\frac{3 - \sqrt{12}i}{1} + (\frac{2}{2 \cdot 1})^2 = -2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} \neq 0$.

- 2 Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{2}{6}\pi} - 1 = 2 \left(\cos \left(\frac{1}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{3}\pi \right) \right) - 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 = \sqrt{3}i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2e^{i\frac{2}{6}\pi} - 1 = -2 \left(\cos \left(\frac{1}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{3}\pi \right) \right) - 1 \\ &= -2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 = -2 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Beispiel

2 Betrachte $z^2 + 2z + 5 = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 2, c = 5$.

1 $(z + \frac{2}{2 \cdot 1})^2 = (z + 1)^2 = -\frac{5}{1} + (\frac{2}{2 \cdot 1})^2 = -4 = 4e^{i\pi} \neq 0$.

2 Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{1}{2}\pi} - 1 = 2 \left(\cos \left(\frac{1}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{2}\pi \right) \right) - 1 \\ &= 2(0 + i) - 1 = -1 + 2i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2e^{i\frac{1}{2}\pi} - 1 = -2 \left(\cos \left(\frac{1}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{2}\pi \right) \right) - 1 \\ &= -2(0 + i) - 1 = -1 - 2i. \end{aligned}$$

Bemerkung

Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0,$$

dann ist auch \bar{z} eine Lösung.

Beispiel

$z = -1 + 2i$ ist eine Lösung von

$$z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Damit ist $\bar{z} = -1 - 2i$ ebenfalls eine Lösung.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, sodass für mindestens ein $a_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) gilt. Dann besitzt das (nichtkonstante) Polynom

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

eine Nullstelle.