1.1 Definition

Sei $X \neq \{\}$ eine Menge. Eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positiv definit)

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrisch)

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. ($\Delta$-Ungleichung)

(X,d) heißt dann metrischer Raum.

1.2 Beispiele:

a) $X = \mathbb{R}^n$ und $X = \mathbb{C}^n$ sind metrische Räume mit

$d_1: X \times X \to \mathbb{R}, d_1((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

$d_2: X \times X \to \mathbb{R}, d_2((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$d_p: X \times X \to \mathbb{R}, d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$

$d_\infty: X \times X \to \mathbb{R}, d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist (E,d) mit $d: E \times E \to \mathbb{R}, d(x,y) = \|x-y\|$ ein metrischer Raum.

c) Sei $M \neq \{\}$ eine Menge. Zu einer Funktion $f: M \to \mathbb{C}$ sei $\|f\|_M = \sup_{x \in M} |f(x)| \in [0, \infty]$.
Sei dann $X = \ell^\infty(M) = \{f: M \to \mathbb{C}, \|f\|_M < \infty\}$. Man kann leicht nachrechnen, dass $\|\cdot\|_M$ eine Norm auf $\ell^\infty(M)$ ist und damit die Metrik $d_M: X \times X \to \mathbb{R}, d_M(f,g) = \|f-g\|_M$ induziert.

Für $A \subseteq M$ schreiben wir $\|f\|_A = \|f|_A\|_M$.

d) Sei $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ oder bel. abzählbares Prod. metrischer Räume geht analog)
und
$d: X \times X \to \mathbb{R}, d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$

Aus dem Majorantenkriterium folgt, dass d wohldefiniert ist.
Dass d symmetrisch und pos. def. ist, ist klar.
Beachte für die Dreiecksungleichung, dass

$f:]-1, \infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t}$

wegen $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ für alle $t \in]-1, \infty[$ str. mon. wachsend ist.
Deshalb gilt für alle $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ mit $\alpha \leq \beta + \gamma$:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta+\gamma}{1+\beta+\gamma} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

Für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ folgt:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|} = d(x,z) + d(z,y).$$

e) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $X = C^n([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{C}, f$ n-mal stetig diffbar$\}$
Sei $d_n: X \times X \to \mathbb{R}, d_n(f,g) = \max_{i=0}^{n} \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_{[a,b]}$.
Dann ist d_n wohldef., da $f, f', \dots, f^{(n)}, g, g', \dots, g^{(n)}$ stetig sind und $[a,b]$ kompakt ist.
Die Metrikeigenschaften sind leicht nachzurechnen.

f) Für $1 \leq p < \infty$ sei $X = \ell^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ so, dass $\sum_{n=0}^\infty |x_n|^p$ konvergiert$\}$.
In FA I zeigt man, dass $d_p: X \times X \to \mathbb{R}, d_p((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\sum_{n=0}^\infty |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$ eine Metrik definiert.

g) Sei $X \neq \{\}$ beliebig. Dann ist $d: X \times X$, $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ eine Metrik auf X.
Man nennt d die diskrete Metrik auf X.

1.3 Definition:

Seien (X,d) ein metrischer Raum und $a \in X$.

a) Für $r > 0$ heißt

$B_r(a) = \{x \in X, d(x,a) < r\}$

die offene Kugel mit Radius r um a und

$\overline{B}_r(a) = \{x \in X, d(x,a) \leq r\}$

die abgeschlossene Kugel mit Radius r um a.

b) $U \subseteq X$ heißt offen, falls gilt:

$\forall x \in U \cdot \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

$F \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus F \subseteq X$ offen ist

c) $U \subseteq X$ heißt Umgebung von a, falls es $V \subseteq X$ offen gibt so, dass

$a \in V \subseteq U \subseteq X$ gilt

d) $\mathcal{U}(a) = \{U \subseteq X, U$ Umgebung von $a\}$.

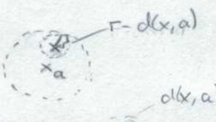
1.4 Proposition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Offene Kugeln sind offen.

b) Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen.

Beweis:



a) Sei also $B_r(a) \subseteq X$ eine offene Kugel, $x \in B_r(a)$. Sei $\varepsilon = r - d(x,a) > 0$
Für alle $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt:

$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r$.

Es folgt $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$, also ist $B_r(a) \subseteq X$ offen.

b) Sei also $\overline{B}_r(a) \subseteq X$ eine abgeschlossene Kugel, $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$

Sei $\varepsilon = d(x,a) - r > 0$. Für alle $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt dann:

1.5 Bemerkung:
Ist $X \neq \{\}$ versehen mit der diskreten Metrik d, so ist jede Teilmenge von X offen und abgeschlossen.
Ist nämlich $U \subseteq X$ und $x \in U$, so ist $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq U$, also ist $U \subseteq X$ offen. Ist $A \subseteq X$, so ist $X \setminus A \subseteq X$ offen, also $A \subseteq X$ abgeschlossen.

1.6 Lemma:
Sei (X, d) ein metrischer Raum.
a) $\{\}, X \subseteq X$ sind offen.
b) $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ offen $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq X$ offen.
c) $(U_i)_{i \in I}$ Familie in X offener Mengen $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$ offen.

Beweis: 2.4 in [Weber], 1.14 a) in [Eschmeier], 1.8 in [Schreyer],
16.1 in [Fuchs].

1.7 Korollar:
Sei (X, d) ein metrischer Raum.
a) $\{\}, X \subseteq X$ sind abgeschlossen.
b) $F_1, \dots, F_n \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq X$ abgeschlossen.
c) $(F_i)_{i \in I}$ Familie in X abg. Mengen $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \subseteq X$ abgeschlossen.

Beweis:
De Morgan + 1.6

1.8 Beispiele:
Durchschnitte bel. vieler offener Mengen (bzw. Vereinigung bel. vieler offener Mengen) müssen nicht offen (abgeschlossen) sein.
Sei etwa $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Dann gelten:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right[= \{0\}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\tfrac{1}{n}, 1\right] = \left]0, 1\right].$$

1.9 Definition:
Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.
Das Innere von A ist $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq A\}$.
Der Abschluss von A ist $\overline{A} = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \{\}\}$.
Der Rand von A ist $\partial A = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \{\} \neq U \cap X \setminus A\}$.

1.10 Lemma:
Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Es gelten:
a) $\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \subseteq X \text{ offen}}} U$
ist die größte in X offene Menge, die in A enthalten ist.
b) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \subseteq X \text{ abg.} \\ \text{mit } F \supseteq A}} F$
ist die kleinste in X abgeschlossene Menge, die A enthält.
c) $\partial A \subseteq X$ ist abgeschlossen. Außerdem gelten
$\overline{A} = A \cup \partial A$, $\mathrm{Int}(A) = A \cap (X \setminus \partial A)$, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.
d) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$
e) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
f) $A \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$
g) $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
h) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (falsch für "$\cap$")
h) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ (falsch für "$\cup$")

Beweis:
a) "$\subseteq$" $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$ und man rechnet leicht nach, dass $\mathrm{Int}(A) \subseteq X$ offen ist
"$\supseteq$" ist klar.
b) "$\subseteq$": Sei $x \in \overline{A}$, $F \subseteq X$ abgeschl. mit $F \supseteq A$.
Wäre $x \notin F$, so wäre $X \setminus F \in \mathcal{U}(x)$ mit $X \setminus F \cap A = \{\}$ $\lightning$
"$\supseteq$": Sei $x \in \bigcap_{\substack{F \subseteq X \text{ abg.} \\ \text{mit } F \supseteq A}} F$, $U \in \mathcal{U}(x)$, o.E. $U \subseteq X$ offen. Dann folgt $U \cap A \neq \{\}$, da sonst
$X \setminus U \subseteq X$ abg. mit $A \subseteq X \setminus U$ und $x \notin X \setminus U$ wäre $\lightning$
c) $\overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) = \partial A$.
Für $x \in X$ gilt: $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \{\}$ und $\underbrace{U \not\subseteq A}_{\Leftrightarrow U \cap (X \setminus A) \neq \{\}} \Leftrightarrow x \in \partial A$.
Insbesondere ist $\partial A \subseteq X$ abgeschlossen.
$\overline{A} = A \cup \partial A$:
"$\supseteq$" ist klar.
"$\subseteq$": Sei $x \in \overline{A}$ und $x \notin A$. Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt dann:
$U \cap A \neq \{\} \neq U \cap (X \setminus A)$,
also ist $x \in \partial A$.

$A \cap (X \setminus \partial A) = \mathrm{Int}(A)$.

"$\supseteq$" ist klar.

"$\subseteq$": Sei $x \in A \cap (X \setminus \partial A) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap (X \setminus A) = \{\}$.

Dann gilt $U \subseteq A$, also $x \in \mathrm{Int}(A)$.

e) aus a): $\overline{B} \subseteq X$ abg mit $A \subseteq \overline{B} \overset{a)}{\Rightarrow} \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

d) genauso aus b)

f) & g) folgen aus a) & b)

h) $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \underset{1.7b)}{\overset{e)}{\Longrightarrow}} \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \subseteq \overline{A \cup B}$ $\overset{e)}{\Longrightarrow} \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$B \subseteq \overline{A \cup B}$

$\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq A$ $\overset{d)}{\Longrightarrow} \mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

$\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq B$

$\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq A \cap B \overset{d)}{\Longrightarrow} \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$

q.e.d.

1.11 Beispiele:

a) Ist $X \neq \{\}$ versehen mit der diskreten Metrik, so gilt für alle $A \subseteq X$.

$$\partial A \overset{1.10c)}{=} \overline{A} \cap (X \setminus \mathrm{Int}(A)) \overset{1.5}{=} A \cap (X \setminus A) = \{\}.$$

Ist $a \in X$ und $|X| > 1$, so folgt insbesondere

$$\partial B_1(a) = \{\} \neq X \setminus \{a\} = \{x \in X, d(x, a) = 1\}.$$

b) In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt: $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

c) In $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$: $\mathrm{Int}([a,b]) =]a,b[$, $\overline{]a,b[} = [a,b]$.