UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 1 Abgabetermin: Mittwoch, 25.10.2017, vor der Vorlesung

---

***Erinnerung**: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Sie heißt konvergent gegen ein $x \in X$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.*

***Erinnerung**: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X,d) heißt beschränkt, falls es $M > 0$ so gibt, dass $d(x,y) \leq M$ für alle $x, y \in A$ gilt, d.h. falls $\{d(x,y); x,y \in X\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt beschränkt, falls die Menge $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt ist.*

Aufgabe 1 (1+1+2 = 4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Cauchyfolgen in (X,d) sind beschränkt.

(b) Konvergente Folgen in (X,d) sind Cauchyfolgen.

(c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X,d) mit einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in (X,d) gegen ein $x \in X$ konvergiert, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in (X,d).

***Erinnerung**: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).*
Dann heißt f folgenstetig, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in X$ schon $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gilt.
Man nennt f gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ aus $d_X(x,y) < \delta$ folgt, dass $d_Y(f(x), f(x)) < \epsilon$ ist.

Aufgabe 2 (1+1+2+2* = 4+2* Punkte)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Sei f gleichmäßig stetig. Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d_X), so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (Y, d_Y).

(b) Zeigen Sie, dass man die gleichmäßige Stetigkeit von f in (a) nicht durch Stetigkeit (d.h. Folgenstetigkeit) ersetzen kann.

(c) Sei nun f derart, dass sie Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbildet. Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig stetig sein muss.

(d) * Sei f wieder derart, dass sie Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbildet. Zeigen Sie, dass f folgenstetig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(2+2+ 2^* = 4 + 2^* Punkte)**

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial B_r(a) \subseteq \{x \in X, d(x,a) = r\}$ und $\overline{B_r(a)} \subseteq \overline{B_r}(a)$ gelten.

(b) Sei nun spezieller $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $d : X \times X \to \mathbb{R}, d(x,y) = \|x - y\|$ die induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass dann sogar $\partial B_r(a) = \{x \in X, d(x,a) = r\}$ und $\overline{B_r(a)} = \overline{B_r}(a)$ gelten.

(c) * Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d), ein $a \in X$ und einen Radius $r > 0$ an so, dass

$$\{\} \neq \partial B_r(a) \neq \{x \in X, d(x,a) = r\}$$

gilt.

Aufgabe 4 **(4x0,5 + 0,5 + 1 + 0,5 = 4 Punkte)**

(a) Finden Sie Beispiele, die zeigen, dass die folgenden Identitäten schon für $A, B \subseteq (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ bzw. eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ aus Teilmengen von $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ falsch sind:

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

(ii) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$,

(iii) $\partial(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \partial A_i$,

(iv) $\partial A = \partial \overline{A}$.

(b) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\mathrm{Int}(\overline{A}) = A$,

(ii) $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}) = \mathrm{Int}\overline{A}$,

(iii) $\overline{\mathrm{Int}(A)} = A$.

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Zur Zulassung für die Abschlussprüfung müssen insgesamt mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht werden.

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre