UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 10 Abgabetermin: Mittwoch, 10.01.2018, vor der Vorlesung

---

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt G_δ-Menge (F_σ-Menge), falls sie Durchschnitt (Vereinigung) von abzählbar vielen offenen (abgeschlossenen) Teilmengen von X ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

(Charakterisierung von G_δ-Mengen in normalen Räumen)

Sei X ein normaler topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossene disjunkte Mengen in X. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f(B) = \{1\}$, wenn $A \subset X$ eine G_δ-Menge ist.

(*Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Urysohn und eine geeignete Funktionenreihe.*)

Aufgabe 43 (4 Punkte)

(Normalität, Lemma von Urysohn und der Fortsetzungssatz von Tietze sind äquivalent)

Sei (X, τ) ein topologischer Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

(i) (X, τ) ist normal,

(ii) Zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $F, G \subseteq X$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f|_F = 0$ und $f|_G = 1$,

(iii) Zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $F, G \subseteq X$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f|_F = 0$ und $f|_G = 1$,

(iv) Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f\colon (A, \tau|_A) \to [a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) stetig, so gibt es eine stetige Funktion $F : X \to [a,b]$ mit $F|_A = f$,

(v) Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f\colon (A, \tau|_A) \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$

(bitte wenden)

Aufgabe 44 (4 Punkte)

(In lokalkompakten Hausdorffräumen kann man immer noch gewisse Trennungssätze zeigen)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien $K \subset X$ kompakt und $U \subset X$ offen mit $K \subset U$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit kompaktem Trger $\operatorname{supp}(f) \subset U$ existiert, so dass $f|_K \equiv 1$ ist.

(*Hinweis: Laut Vorlesung gibt es eine offene Menge $V \subset X$ mit kompaktem Abschluss, so dass $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ ist. Wenden Sie Urysohns Lemma auf $K, \partial V \subset \overline{V}$ an.*)

Definition: *Für topologische Räume X, Y sei $C(X,Y) = \{f : X \to Y; f \text{ ist stetig}\}$.*

Aufgabe 45 (2+1+1 = 4 Punkte)

(Injektivität und Surjektivität dualer Abbildungen hängt in einem sehr allgemeinen Setting von den entsprechenden Eigenschaften der Abbildung selbst ab)

Seien X, Y normale topologische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Weiter sei die Abbildung $f^* : C(Y,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R})$ durch $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ für $\varphi \in C(Y,\mathbb{R})$ definiert. Zeigen Sie:

(a) f^* ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Bild}(f) \subseteq Y$ dicht ist.

(b) Ist f^* surjektiv, so ist f injektiv.

(c) Ist f injektiv und abgeschlossen, so ist f^* surjektiv.

Aufgabe 46* ($2^* + 2^* = 4^*$ Punkte)

(Mehr Eigenschaften der Quotiententopologie)

(a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und sei $B \subseteq Y$. Zeigen Sie: Ist f abgeschlossen (offen), so gibt es für jede offene (abgeschlossene) Menge $D \subseteq X$ mit $D \supseteq f^{-1}(B)$ eine offene (abgeschlossene) Menge $E \subseteq Y$ mit $B \subseteq E$ und $f^{-1}(E) \subseteq D$.

(b) Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, für die

$$R = \{(x,y) \in X \times X; x \sim y\} \subseteq X \times X$$

abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ versehen mit der Topologie aus Aufgabe 35 ein kompakter Hausdorffraum ist. (*Hinweis: Nutzen Sie, dass X auch normal ist.*)