UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 11 Abgabetermin: Mittwoch, 17.01.2018, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 47 (2+2=4 Punkte)

(In lokalkompakten Hausdorffraumen gibt es zu endlichen Überdeckungen von kompakten Teilmengen eine stetige Zerlegung der Eins)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt offene, relativ kompakte Mengen $V_1, \ldots, V_n \subset X$ mit $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$ und $\overline{V_i} \subset U_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) Es gibt stetige Funktionen $f_1, \ldots, f_n : X \to [0,1]$ mit kompakten Trägern, so dass $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ für alle $x \in K$ gilt.
(Hinweis: Eine stetige Abschneidefunktion $\Theta : X \to [0,1]$ mit $\Theta|_K = 1$ und supp$(\Theta) \subseteq V_1 \cup ... \cup V_n$ zu Mengen $V_1, ..., V_n \subseteq X$ wie in a) könnte nützlich sein.)

Ein Hausdorffscher topologischer Raum, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt, heißt topologische m-Mannigfaltigkeit*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^m$ ist.*

Aufgabe 48 (4 Punkte)

(Kompakte topologische Mannigfaltigkeiten können in einen euklidischen Raum eingebettet werden)

Sei X eine kompakte topologische m-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl N und eine topologische Einbettung (= Homöomorphismus aufs Bild) $f : X \to \mathbb{R}^N$ gibt.
(Hinweis: Wählen Sie eine offene Überdeckung $(U_i)_{i=1}^n$ von X, so dass Homöomorphismen $g_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ existieren, und benutzen Sie eine stetige Zerlegung der Eins bezüglich $(U_i)_{i=1}^n$, um eine injektive stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^{n+nm}$ zu konstruieren.)

(bitte wenden)

Ein topologischer Hausdorffraum X heißt vollständig regulär*, falls zu jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X$ und jedem $x \in X \setminus F$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ existiert mit $f(x) = 0$ und $f|_F \equiv 1$.*

Aufgabe 49 — (1+1+2=4 Punkte)

(Charakterisierung vollständig regulärer topologischer Räume)

Sei X ein topologischer Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) X vollständig regulär $\Rightarrow$ X regulär.

(b) Ist X vollständig regulär, so ist auch jeder Teilraum $Y \subset X$ (versehen mit der Relativtopologie) vollständig regulär.

(c) X ist genau dann vollständig regulär, wenn X homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten topologischen Hausdorffraums ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie die Menge*

$$\mathcal{C} = \{f : X \to [0,1];\ f \text{ stetig}\}$$

und die Abbildung $j : X \to \prod_{\mathcal{C}} [0,1],\ x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}}$ *.*)

Aufgabe 50 — (4 Punkte)

(Wann sind kompakte Hausdorffräume metrisierbar?)

Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum X genau dann metrisierbar ist, wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.