UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 12 Abgabetermin: Mittwoch, 24.01.2018, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 51 (2+2=4 Punkte)

((Weg-)Zusammenhang bleibt unter stetigen Abbildungen erhalten; Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang)

Seien (X, τ), (Y, t) topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.

(b) Ist X wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.

(c) Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

(Sind Inneres, Abschluss und Rand zusammenhängender Mengen zusammenhängend?)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Welche der folgenden sechs Implikationen gelten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) A zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Int}(A)$ zusammenhängend,

(b) A zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ zusammenhängend,

(c) A zusammenhängend $\Leftrightarrow$ ∂A zusammmenhängend.

Aufgabe 53 (1+1+2 = 4 Punkte)

(Produkte (weg-)zusammenhängender Räume)

Sei $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

(a) X ist wegzusammenhängend genau dann, wenn alle X_i $(i \in I)$ wegzusammenhängend sind.

(b) Für $a = (a_i)_{i \in I}$ ist $\{x = (x_i)_{i \in I}; x_i = a_i$ für fast alle $i \in I\} \subseteq X$ dicht.

(c) X ist zusammenhängend genau dann, wenn alle X_i $(i \in I)$ zusammenhängend sind.

(bitte wenden)

Aufgabe 54 **(1,5+2,5=4 Punkte)**

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq X$, so gilt für jede zusammenhängende Teilmenge $Y \subseteq X$

$$Y \cap A \neq \varnothing \text{ und } Y \cap (X \setminus A) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad Y \cap \partial A \neq \varnothing.$$

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist zusammenhängend,

(ii) Für alle $\emptyset \neq A \subsetneq X$ gilt $\partial A \neq \emptyset$,

(iii) Es gibt kein $\emptyset \neq A \subsetneq X$ so, dass $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen ist.

Zwei Teilmengen A, B eines topologischen Raums heißen getrennt*, falls $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$ gilt.*

Aufgabe 55* **(4* Punkte)**

(Wann genau sind Vereinigungen zusammenhängender Teilräume wieder zusammenhängend?)

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ zwei nichtleere, zusammenhängende Mengen in X. Zeigen Sie:

$$A \cup B \text{ ist zusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad A, B \text{ sind nicht getrennt}$$
