UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 13 Abgabetermin: Mittwoch, 31.01.2018, vor der Vorlesung

---

Dieses zusätzliche Aufgabenblatt kann als Probeklausur dienen. Die Aufgaben sind ungefähr auf dem Niveau, wie es in der Klausur zu erwarten ist. Lediglich Aufgabe 56 b) könnte etwas schwieriger als eine typische Klausuraufgabe sein. Auch die Gewichtung der Themengebiete in der Klausur wird ähnlich sein, aber natürlich nicht gleich.

Aufgabe 56* ($2^*+6^* = 8^*$ Punkte)

(a) Seien (X,d) ein metrischer Raum und $f : X \to (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$, $g : X \to (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ gleichmäßig stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $h : X \to (\mathbb{R}^2, \tau_{\|\cdot\|_1}), x \mapsto (f(x), g(x))$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass (X,d) vollständig ist genau dann, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ konvergiert, schon selbst konvergent ist.

(*Hinweis: Für eine Richtung könnte es nützlich sein, von einer beliebigen Cauchy-Folge zu einer geeigneten Teilfolge überzugehen.*)

Aufgabe 57* (6^* Punkte)

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum, $\varphi : K \to K$ eine Abbildung mit

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y)$$

für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$. Zeigen, dass es dann genau ein $x_0 \in K$ gibt so, dass $\varphi(x_0) = x_0$ gilt.

Aufgabe 58* ($2^*+4^*+2^*+2^*+3^* = 13^*$ Punkte)

(a) Seien (X,τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass A genau dann Durchschnitt einer in (X,τ) abgeschlossenen mit einer in (X,τ) offenen Menge ist, wenn es für jedes $x \in A$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ gibt so, dass $U_x \cap A \subseteq U_x$ abgeschlossen ist.

(b) Sei (X,τ) ein topologischer Hausdorffraum und $F \subseteq X$ endlich. Zeigen Sie, dass $F \subseteq X$ abgeschlossen ist.

(bitte wenden)

(c) Seien (X,τ) ein topologischer Raum und $A,B \subseteq X$ kompakte Teilengen. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ kompakt in (X,τ) ist.

(d) Seien (X,τ) ein topologischer Hausdorffraum und $A,B \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A \cap B$ kompakt in (X,τ) ist.

(e) Seien (X,τ), (Y,t) topologische Räume, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ eine Basis von τ und $f : X \to Y$ eine surjektive, stetige und offene (d.h. sie bildet offene Mengen auf offene Mengen ab) Abbildung. Zeigen Sie, dass $f(\mathcal{B})$ eine Basis von t ist.

Aufgabe 59* **($4^*+4^* = 8^*$ Punkte)**

(a) Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass (X,τ) Hausdorffsch ist genau dann, wenn für alle $x \in X$ schon $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U}$ gilt.

(b) Sei (X,τ) ein topologischer Raum so, dass es für jedes $x \in X$ eine stetige Funktion $f : X \to (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ mit $f^{-1}(\{0\}) = \{x\}$ gibt. Zeigen Sie, dass (X,τ) Hausdorffsch ist.

Aufgabe 60* **(4^* Punkte)**

Seien (X,τ) ein kompakter topologischer Raum, (Y,t) ein topologischer Raum und das kartesische Produkt $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung $\pi_2 : X \times Y \to Y, (x,y) \mapsto y$ abgeschlossen ist (d.h. abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet).

Aufgabe 61* **(8^* Punkte)**

Sei (X,τ) ein topologischer Raum, (Y,t) ein kompakter Hausdorffraum und das kartesische Produkt $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn ihr Graph $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in X\} \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

(*Hinweis: Verwenden Sie für die Richtung $\Leftarrow$ einen Widerspruchsbeweis.*)

Aufgabe 62* **(6^* Punkte)**

Sei (X,τ) ein topologischer Raum so, dass $|X| < \infty$ gilt und für alle $x,y \in X$ mit $x \neq X$ offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ existieren so, dass $y \notin U$, $x \notin V$ gelten. Zeigen Sie, dass dann $\tau = \mathcal{P}(X)$ gilt.

Aufgabe 63* **($4^*+3^* = 7^*$ Punkte)**

(a) Seien (X,τ) ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine lokalkonstante Funktion, d.h. es gelte

$$\forall x \in X : \exists U \in \mathcal{U}(x) : \exists c \in \mathbb{R} : \forall y \in U : f(y) = c.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(b) Finden Sie einen topologischen Raum (X,τ) und eine lokal konstante Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, die nicht konstant ist.
