UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 8.11.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (1+1+0,5+0,5+1 = 4 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq Y \subset X$ versehen mit der Relativmetrik d_Y. Zeigen Sie:

  (i) Eine Teilmenge $U \subseteq Y$ ist genau dann offen in (Y, d_Y), wenn eine in (X, d) offene Menge V existiert mit $U = V \cap Y$.

  (ii) Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ ist genau dann abgeschlossen in (Y, d_Y), wenn eine in (X, d) abgeschlossene Menge B existiert mit $A = B \cap Y$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raums (X, d) und von Teilmengen $\emptyset \neq A \subsetneq Y \subset X$ an so, dass jeweils gilt:

  (i) A ist in (Y, d_Y) offen, aber in (X, d) nicht offen.

  (ii) A ist in (Y, d_Y) abgeschlossen, aber in (X, d) nicht abgeschlossen.

  (iii) A ist in (Y, d_Y) offen und abgeschlossen.

Aufgabe 6 (1,5+1,5+1=4 Punkte)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $A : X \to X$ eine Abbildung, zu der eine Konstante $\theta \in [0, 1)$ existiert mit

$$d(Ax, Ay) \leq \theta d(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Für $x_0 \in X$ sei die Folge $(x_n)_n$ in X rekursiv definiert durch $x_{n+1} = Ax_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $d(x_{n+k}, x_n) \leq \left(\sum_{j=n}^{n+k-1} \theta^j \right) d(x_1, x_0)$.

(b) Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen ein $a \in X$ mit $A(a) = a$.

(c) Der Fixpunkt a von A ist eindeutig bestimmt, d.h. gilt $A(\tilde{a}) = \tilde{a}$ für ein $\tilde{a} \in X$, so ist schon $\tilde{a} = a$.

(bitte wenden)

Aufgabe 7 **(1+1+2+1*+2* = 4 + 3* Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ streng monoton wachsend und subadditiv (d.h. es gilt $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$) mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f \circ d$ eine Metrik auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}, \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine Metrik auf X definiert.

(c) Zeigen sie, dass (X, d) und $(X, \tilde{d})$ dieselben offenen Mengen haben.

(d) * Finden Sie eine Menge $X \neq \emptyset$ und Metriken $d, \tilde{d}$ auf X so, dass (X, d) und $(X, \tilde{d})$ dieselben offenen Mengen, aber nicht dieselben beschränkten Mengen haben.

(e) * Sei $Y = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ versehen mit der diskreten Metrik d bzw. der Relativmetrik d_Y von $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Zeigen Sie: (Y, d) und (Y, d_Y) haben dieselben offenen Mengen, aber (Y, d_Y) ist nicht vollständig.

Aufgabe 8 **(4 Punkte)**

Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) vollständige metrische Räume, sei (X, d) ein weiterer metrischer Raum und seien $i_1 : X \to X_1$, $i_2 : X \to X_2$ isometrische Abbildungen mit dichtem Bild. Zeigen Sie: Es existiert eine eindeutig bestimmte isometrische Bijektion $\Phi : X_1 \to X_2$ mit $i_2 = \Phi \circ i_1$.

Aufgabe 9* **(2*+2*=4* Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und für $x \in X$ die Abbildung $f_x : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_x(t) = d(x, t) - d(x_0, t).$$

Zeigen Sie:

(a) $j : X \to \ell^\infty(X),\ j(x) = f_x$ ist eine Isometrie zwischen metrischen Räumen.

(b) Geben Sie einen alternativen Beweis für die Existenz der Vervollständigung von X (d.h. einen Beweis, der keine Äquivalenzrelation benutzt).

Aufgabe 10* **(2*+2*=4* Punkte)**

Sei $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge metrischer Räume und sei $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ das kartesische Produkt der Mengen X_n.

(a) Begründen Sie, dass durch

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass der metrische Raum (X, d) vollständig ist genau dann, wenn alle (X_n, d_n) vollständig sind.