UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 15.11.2017, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum so, dass für jede Folge abgeschlossener Mengen $\varnothing \neq A_k \subset X$ mit $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\operatorname{diam}(A_k) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ein $x \in X$ existiert mit $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x\}$. Zeigen Sie, dass X vollständig ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Teilmengen $U_n \subset \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

(*Hinweis: Betrachten Sie außer den Mengen U_n auch die Mengen $V_q = \{q\}$ $(q \in \mathbb{Q})$ und wenden Sie den Satz von Baire an.*)

Aufgabe 13 (1+2+1 = 4 Punkte)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $F \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so ist $F \subseteq E$ abgeschlossen.
(*Hinweis: Benutzen Sie Lemma 2.10. Sie dürfen benutzen, dass auf endlichdimensionalen Vektorräumen alle Normen äquivalent sind.*)

(b) Ist $F \subseteq E$ ein Untervektorraum mit $\operatorname{Int}(F) \neq \emptyset$, so gilt $F = E$.

(c) Sei nun $(E, \|\cdot\|)$ zusätzlich vollständig. Zeigen Sie, dass die Indexmenge I einer Vektorraumbasis $\{e_i; i \in I\}$ von E entweder endlich oder überabzählbar ist.
(*Hinweis: Nehmen sie an, E hätte eine abzählbare Vektorraumbasis und nutzen Sie den Satz von Baire, um einen Widerspruch zu erhalten.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 14 **(3+0,5+0,5 + 2* = 4 + 2* Punkte)**

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $M, M_1, M_2 \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $M \subseteq X$ ist nirgends dicht,

(ii) Für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen ist $U \cap M$ nicht dicht in (U, d_U),

(iii) Für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen gibt es $\emptyset \neq V \subseteq X$ offen mit $V \subseteq U$ und $M \cap V = \emptyset$,

(iv) Es gibt eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $U \subseteq X \backslash M$ und $\overline{U} = X$.

(*Hinweis: Man kann zum Beispiel (i)* $\implies$ *(ii)* $\implies$ *(iii)* $\implies$ *(i) und (i)* $\Leftrightarrow$ *(iv) zeigen.*)

(b) (i) Zeigen Sie, dass gilt: Sind $M_1, M_2 \subseteq X$ nirgends dicht, so ist auch $M_1 \cup M_2 \subseteq X$ nirgends dicht.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen sind nirgends dicht.

(c) * Sei nun $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Definiere die fette Cantor-Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ wie folgt: Zunächst seien $C^{(0)} = C_1^{(0)} = [0, 1]$, $C^{(1)} = C_1^{(1)} \cup C_2^{(1)} = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$. Ist $C^{(n)} = C_1^{(n)} \cup ... \cup C_{2^n}^{(n)}$ schon definiert und ist $C_i^{(n)} = [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ für $i = 1, ..., 2^n$, so sei

$$C_i^{(n+1)} = \begin{cases} [a_i^{(n)}, \frac{b_i^{(n)} + a_i^{(n)}}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n+1}}], & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ [\frac{b_i^{(n)} + a_i^{(n)}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n+1}}, b_i^{(n)}], & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

für $i = 1, ..., 2^{n+1}$. Damit sei $C^{(n+1)} = \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} C_i^{(n+1)}$ und schließlich $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
Zeigen Sie: $C \subseteq \mathbb{R}$ ist nirgends dicht.