UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 4 Abgabetermin: Mittwoch, 22.11.2017, vor der Vorlesung

---

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\varnothing \neq A \subset X$ bezeichne

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$$

den Abstand *eines Elementes $x \in X$ zur Menge A.*

Aufgabe 15 (1+1+1+1+1* = 4 + 1* Punkte)

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge und $A, B \subseteq X$ abgeschlossene, nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $d_M : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, M)$ ist stetig,

(b) $\overline{M} = \{x \in X, d(x, M) = 0\}$,

(c) Sind A und B disjunkt, so existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ so, dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A \quad \text{und} \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B,$$

(d) Sind A und B disjunkt, so gibt es disjunkte, offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$,

(e) * Es gibt eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X offener Teilmengen mit

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die folgenden Mengensysteme $\tau_i \subset \mathcal{P}(X)$ $(i = 1, 2, 3)$ Topologien auf X sind und unter welchen Bedingungen diese Hausdorffsch sind:

$$\tau_1 = \{U \subseteq X; X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\tau_2 = \{U \subseteq X; X \setminus U \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\tau_3 = \{U \subseteq X; X \setminus U \text{ ist unendlich}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}.$$

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen $U_i \subseteq X$ $(i \in I)$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I: \quad f|_{U_i} : (U_i, \tau_X|_{U_i}) \to Y \text{ ist stetig}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 18 **(1+1+1+1 = 4 Punkte)**

Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig genau dann, wenn für alle $V \subseteq Y$ gilt: $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(\overline{V})$,

(b) f ist stetig genau dann, wenn für alle $V \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(\mathrm{Int}(V)) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(V))$,

(c) f ist stetig genau dann, wenn für alle $U \subseteq X$ gilt: $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.

(d) Sei nun zusätzlich f bijektiv. Zeigen Sie dass f dann ein Homöomorphismus ist genau dann, wenn für alle $U \subseteq X$ gilt: $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$.

Aufgabe 19* **(3*+1*=4* Punkte)**

Sei $\mathbb{R}$ mit $d = d_{|\cdot|}$ versehen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$U_n = \bigcup \left(U;\ U \subset \mathbb{R} \text{ offen mit } \mathrm{diam} f(U) < \frac{1}{n} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ist die Menge der reellen Zahlen, in denen f stetig ist.

(b) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau in allen rationalen Zahlen stetig ist.
