UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 29.11.2017, vor der Vorlesung

---

Spezialaufgabe (0 Punkte)

Bitte geben Sie auf

www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS1718/top/evaluation.html

anonmyes Feedback zur Vorlesung bzw. zur Übungsgruppe ab.

Aufgabe 20 (1+1+2+2*=4 + 2* Punkte)

Sei X eine nichtleere Menge und

$$\tau = \{U \subset X;\ U = \varnothing \text{ oder } X \setminus U \text{ endlich}\}$$

die Topologie aus Aufgabe 16.

(a) Sei A eine Teilmenge von X. Was ist der Abschluß von A bezüglich τ?

(b) Was sind die kompakten Mengen von (X, τ)?

(c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ genau dann stetig ist, wenn f konstant ist oder $f^{-1}(\{x\})$ endlich ist für alle $x \in X$.

(d) * Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und sei

$$\Gamma = \{x \in X;\ x = x_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie: Wenn $\Gamma = \varnothing$ gilt, dann konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen jeden Punkt $x \in X$. Wenn Γ genau einen Punkt x enthält, dann konvergiert die Folge $(x_n)_n$ (genau) gegen diesen Punkt x. Andernfalls konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gar nicht.

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Zeigen Sie, dass ein System $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X genau dann die Basis einer Topologie τ auf X ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

(ii) Für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_0 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$.

Zeigen Sie auch, dass in diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \tau &= \{U \subset X;\ \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U\} \\ &= \bigcap_{t \text{ Topologie auf } X \text{ mit } \mathcal{B} \subseteq t} t. \end{aligned}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 22 **(1,5+1,5+1 = 4 Punkte)**

(a) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und seien τ_1, τ_2 Topologien auf X. Zeigen Sie:

(i) Sind $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von τ_1 bzw. τ_2, so gilt:

$$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \forall B_1 \in \mathcal{B}_1 : \forall x \in B_1 : \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 : x \in B_2 \subseteq B_1.$$

(ii) Sind $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ Subbasen von τ_1 bzw. τ_2, so gilt:

$$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}_1 : \forall x \in S : \exists S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}_2 : x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq S.$$

(b) Seien (X, τ_1), (Y, τ_2) topologische Räume, $\mathcal{S}_2$ eine Subbasis von τ_2 und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f stetig ist genau dann, wenn $f^{-1}(S) \in \tau_1$ für alle $S \in \mathcal{S}_2$ gilt.

Aufgabe 23 **(1+1+1+1+1= 5 Punkte)**

Es sei

$$\mathfrak{B} = \{[a, b);\ a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\}$$

das Mengensystem der halboffenen Intervalle. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{B}$ ist Basis einer Hausdorffschen Topologie τ auf $\mathbb{R}$.

(b) Es gilt $\tau_{|\cdot|} \subsetneq \tau$.

(c) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert genau dann bezüglich τ gegen ein $x \in \mathbb{R}$, wenn sie bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert und zusätzlich $x_n \geq x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) $(\mathbb{R}, \tau)$ ist separabel und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(e) $(\mathbb{R}, \tau)$ ist nicht metrisierbar (d.h. es gibt keine Metrik d auf $\mathbb{R}$ mit $\tau = \tau_d$).

Aufgabe 24* **(2*+1* + 1* = 4* Punkte)**

Für $a, b, x \in \mathbb{Z}$ schreibt man bekanntlich

$$x \equiv b \bmod a,$$

falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x - b = ka$ gibt. Für $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sei

$$V(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv b \bmod a\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \{V(a, b); b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$$

Basis einer Topologie τ auf $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Mengen $V(a, b)$ ($b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$) in $(\mathbb{Z}, \tau)$ abgeschlossen sind.

(c) Benutzen Sie a) und b) um zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.