UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 6.12.2017, vor der Vorlesung

Erinnerung: *Ein topologischer Raum (X, τ) heißt folgenkompakt, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.*

Aufgabe 25 (2 + 2 = 4 Punkte)

(Folgenkompakte metrische Räume sind separabel)

Sei (X, d) ein folgenkompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $x_1, ...x_n \in X$ mit $X = B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_n)$.

(b) (X, d) ist separabel.
(*Hinweis: Wenden Sie a) für alle $k \in \mathbb{N}^*$ auf $\epsilon = \frac{1}{k}$ an.*)

Aufgabe 26 (2+1+1 = 4 Punkte)

(Definition und elementare Eigenschaften der Finaltopologie)

Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und I eine beliebige Indexmenge. Für $i \in I$ sei (X_i, t_i) ein topologischer Raum und $f_i : X_i \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem
$$\tau = \{U \subset X;\ f_i^{-1}(U) \in t_i \text{ für alle } i \in I\}$$
definiert eine Topologie auf X.
(Man nennt diese die von den f_i $(i \in I)$ erzeugte *Finaltopologie*.)

(b) τ ist die feinste Topologie auf X, bezüglich der die Abbildung $f_i : (X_i, t_i) \to (X, \tau)$ für alle $i \in I$ stetig ist.

(c) Ist (Y, t) ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : (X, \tau) \to (Y, t)$ genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Abbildung $g \circ f_i : (X_i, t_i) \to (Y, t)$ stetig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 27 **(1+2*+2+1 = 4 + 2* Punkte)**

(Kann man die Produkttopologie nicht einfacher definieren?)

Sei $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei $X = \prod_{i\in I} X_i$. Sei außerdem

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} U_i; U_i \subseteq X_i \text{ offen für alle } i \in I\}$$

das System der Produkte offener Mengen. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie τ auf X.

(b) * Seien zusätzlich alle (X_i, τ_i) $(i \in I)$ Hausdorffsch. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i^{(n)})_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in (X, τ) gegen ein $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ genau dann, wenn $x_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_i$ in (X_i, τ_i) für alle $i \in I$ gilt und es eine endliche Menge $J \subseteq I$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $x_i^{(n)} = x_i^{(m)}$ für alle $i \in I\backslash J$ und alle $n, m \geq N$ gilt.

(c) Sei nun speziell $I = \mathbb{N}$ und $(X_i, \tau_i) = (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f : \mathbb{R} \to \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, x \mapsto (x)_{i\in\mathbb{N}}$$

nicht stetig.

(d) Sei nun speziell $I = \mathbb{N}$ und $(X_i, \tau_i) = (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann hat die durch

$$x_m^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{, falls } m < n \\ 1 & \text{, falls } m \geq n \end{cases}$$

für $n, m \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = ((x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ in X keine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 28 **(1+1,5+1,5= 4 Punkte)**

(Verträglichkeit von Abschluss und Innerem mit der Bildung von Produkten)

Seien (X_i, τ_i) topologische Räume $(i \in I)$ und sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie τ versehen. Für $i \in I$ seien $A_i \subset X_i$, Zeigen Sie:

(a) Sind alle $A_i \subset X_i$ $(i \in I)$ abgeschlossen, so ist auch $\prod_{i\in I} A_i \subset X$ abgeschlossen.

(b) Es gilt $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

(c) Es gilt $\mathrm{Int}(\prod_{i\in I} A_i) \subset \prod_{i\in I} \mathrm{Int}(A_i)$. Gilt im allgemeinen Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 29* **(3* Punkte)**

(Relativtopologien separabler Topologien müssen nicht separabel sein)

Sei σ die von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$ (vergleiche Aufgabe 23) und sei

$$(\mathbb{R}^2, \tau) = (\mathbb{R}, \sigma) \times (\mathbb{R}, \sigma)$$

das topologische Produkt (d.h. $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Produkttopologie). Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \tau)$ ein separabler topologischer Raum ist, dass aber die Menge

$$D = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Relativtopologie $\tau|_D$ nicht separabel ist.
