UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 7 Abgabetermin: Mittwoch, 13.12.2017, vor der Vorlesung

---

Definition: *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt offen (abgeschlossen), falls $f(N) \subseteq Y$ für jede offene (abgeschlossene) Menge $M \subseteq X$ offen (abgeschlossen) ist.*

Aufgabe 30 (2+2=4 Punkte)

(Hausdorffeigenschaft überträgt sich auf Produkte; Projektionen sind offen)

Seien (X_i, t_i) topologische Räume $(i \in I)$ und sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie t versehen. Zeigen Sie:

(a) (X, t) ist genau dann Hausdorffsch, wenn alle (X_i, t_i) $(i \in I)$ Hausdorffsch sind.

(b) Die kanonischen Projektionen

$$\pi_j : X \to X_j,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j \quad (j \in I)$$

sind offen aber im allgemeinen nicht abgeschlossen.

Definition: *Sei $X \neq \emptyset$. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Filter, falls gilt:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$,

(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(iii) $F \in \mathcal{F}, F' \in \mathcal{P}(X)$ *with* $F \subseteq F' \implies F' \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ heißt Filterbasis für $\mathcal{F}$, falls es für alle $F \in \mathcal{F}$ ein $F_0 \in \mathcal{F}_0$ mit $F_0 \subseteq F$ gibt.

Definition: *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter, $x \in X$.*
Dann nennen wir $\mathcal{F}$ konvergent gegen x, falls $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ gilt. Wir schreiben $\mathcal{F} \to x$ und nennen x Limes oder Grenzwert von $\mathcal{F}$. Wir nennen x Berührpunkt oder Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, falls $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ gilt.

Aufgabe 31 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

(Auch mit Filtern lassen sich topologische Konzepte beschreiben)

Seien (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Eine Menge $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$ ist Filterbasis eines Filters $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann, wenn es für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0$ ein $F_0 \in \mathcal{F}_0$ gibt so, dass $F_0 \subseteq F_1 \cap F_2$ gilt. In diesem Fall ist

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X; \exists F_0 \in \mathcal{F}_0 : F_0 \subseteq F\} = \bigcap_{\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}_0 \text{ Filter}} \mathcal{F}'.$$

Sei nun zusätzlich $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter, $x \in X$. Zeigen Sie:

(b) x ist Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es einen Filter $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gibt so, dass $\mathcal{G} \to x$ gilt.

(c) Für $A \subseteq X$ gilt

$$\overline{A} = \{x \in X, \text{ es gibt einen Filter } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ mit } A \in \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F} \to x\}.$$

Sei nun zusätzlich (Y, t) ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $f(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ der Filter mit Filterbasis $\{f(F), F \in \mathcal{F}\}$. Zeigen Sie:

(d) f ist stetig in x genau dann, wenn für jeden Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{F} \to x$ schon $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ gilt.

Notation: Für ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in einem topologischen Raum (X, τ) und $\alpha \in A$ schreiben wir $\alpha^+ = \{x_\beta, \beta \geq \alpha\}$.

Aufgabe 32 **(0,5+0,5+1*+1*+3 = 4+2* Punkte)**

(Zusammenhang zwischen Filtern und Netzen)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum Zeigen Sie:

(a) Sei $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in A. Dann ist $\mathrm{Filt}_0(\mathbf{x}) = \{\alpha^+, \alpha \in A\}$ Filterbasis eines Filters $\mathrm{Filt}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(b) Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter. Wählt man zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein $x_F \in F$, so ist $(x_F)_{F \in \mathcal{F}}$ ein Netz, wobei $\mathcal{F}$ mit der durch

$$F_1 \leq F_2 :\Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2 \quad (F_1, F_2 \in \mathcal{F})$$

definierten Quasi-Ordnung versehen ist. Wir nennen ein solches Netz assoziiert mit $\mathcal{F}$.
Mit $A(\mathcal{F}) = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F}, x \in F\}$ versehen mit der durch

$$(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) :\Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2 \quad ((x_1, F_1), (x_2, F_2) \in A(\mathcal{F}))$$

definierten Quasi-Ordnung ist auch $A(\mathcal{F}) \to X, (x, F) \mapsto x$ ein Netz. Wir schreiben $\mathrm{Net}(\mathcal{F})$ für dieses Netz $(x)_{(x,F) \in A(\mathcal{F})}$.

(c) * Für jeden Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt $\mathrm{Filt}(\mathrm{Net}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

(d) * Für ein Netz $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X muss nicht $\mathrm{Net}(\mathrm{Filt}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ gelten.
(*Hinweis: Benutzen Sie, dass für beliebige Mengen X schon $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times X)| > |\mathcal{P}(X) \times X|$ gilt.*)

(e) Seien $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in X, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter und $x_0 \in X$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathcal{F} \to x_0$ genau dann, wenn $\mathrm{Net}(\mathcal{F})$ gegen x_0 konvergiert. Dies gilt wiederum genau dann, wenn jedes mit $\mathcal{F}$ assoziierte Netz gegen x_0 konvergiert.

(ii) Es gilt $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x_0$ genau dann, wenn $\mathrm{Filt}(\mathbf{x}) \to x_0$ gilt.

(iii) Ist $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in I}$ ein Teilnetz von $\mathbf{x}$, so gilt $\mathrm{Filt}(\mathbf{x}) \subseteq \mathrm{Filt}(\mathbf{y})$.

(bitte wenden)

Definition: *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in X. Wir nennen ein Netz $(y_i)_{i \in I}$ in X kofinales Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, falls $I \subseteq A$ gilt, $y_i = x_i$ für alle $i \in I$ gilt und für jedes $\alpha \in A$ ein $i \in I$ mit $i \geq \alpha$ existiert.*

Aufgabe 33 (0,5+ 1,5 + 1* + 2* + 2 + 2* + 1* = 4 + 6* Punkte)

(Könnte man Teilnetze nicht einfacher definieren?)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jedes kofinale Teilnetz eines Netzes auch ein Teilnetz desselben Netzes ist.

(b) Sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge einer Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X. Zeigen Sie, dass es ein kofinales Teilnetz $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in I}$ von $\mathbf{x}$ gibt so, dass $\text{Filt}((x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}) = \text{Filt}(\mathbf{y})$ gilt.

(c) * Sei $(y_i)_{i \in I}$ ein kofinales Teilnetz einer Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathbf{x}$ gibt so, dass $\text{Filt}((x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}) = \text{Filt}(\mathbf{y})$ gilt.

(d) * Finden Sie eine Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$, die ein Teilnetz $\mathbf{y}$ hat so, dass für keine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schon $\text{Filt}((x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}) = \text{Filt}(\mathbf{y})$ gilt.

(e) Sei $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in X, $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass x_0 ein Häufungspunkt von $\mathbf{x}$ ist genau dann, wenn es ein Teilnetz $\mathbf{y}$ von $\mathbf{x}$ gibt, dass gegen x_0 konvergiert.

(f) * Sei jetzt speziell $(X, \tau) = (l^1, \tau_{\|\cdot\|_1})$ und $(l^1)' = \{u : l^1 \to \mathbb{C}, u \text{ ist stetig linear}\}$ sein Dualraum. Definiere τ_w auf l^1 als die schwache Topologie, die von den Abbildungen $u : l^1 \to \mathbb{C}$ ($u \in (l^1)'$) erzeugt wird. Sie dürfen annehmen, dass l^1 die Schur-Eigenschaft hat, d.h. dass eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in l^1 genau dann bezüglich τ_w konvergiert, wenn sie bezüglich $\tau_{\|\cdot\|_1}$ konvergiert. Zeigen Sie damit, dass es eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in (l^1, τ_w) gibt, die Häufungspunkt 0 hat, aber keine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert.

(*Hinweis: Beim Lösen dieser Aufgabe hilft es, etwas Erfahrung mit schwachen Topologien aus der Funktionalanalysis mitzubringen.*)

(g) * Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum (Y, t), ein Netz $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in Y gibt so, dass es einen Häufungspunkt x_0 von $\mathbf{x}$ ist, zu dem es kein kofinales Teilnetz $(y_i)_{i \in I}$ von $\mathbf{x}$ gibt so, dass $y_i \xrightarrow{i} x_0$ gilt.