UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 8 Abgabetermin: Mittwoch, 20.12.2017, vor der Vorlesung

---

Definition: *Seien (X,τ) ein topologischer Raum und $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in I}$ Netze in X. Wir nennen $\mathbf{y}$ ein Kelley-Teilnetz von $\mathbf{x}$, falls es eine Abbildung $I \to A, i \mapsto \alpha_i$ gibt so, dass $y_i = x_{\alpha_i}$ für alle $i \in I$ gilt und es zu jedem $\alpha \in A$ ein $i \in I$ gibt so, dass $\alpha_j \geq \alpha$ für alle $j \geq i$ gilt.*
Außerdem nennen wir $\mathbf{y}$ AA-Teilnetz von $\mathbf{x}$, falls Filt$(\mathbf{x}) \subseteq$ Filt$(\mathbf{y})$ gilt (vgl. Aufgabe 32).

Aufgabe 34 (0,5+1*+3*+1,5=2 + 4* Punkte)

(Typische alternative Definitionen von Teilnetzen und deren logischer Zusammenhang)

Seien (X,τ) ein topologischer Raum und $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in I}$ Netze in X. Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{y}$ Teilnetz von $\mathbf{x}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{y}$ Kelley-Teilnetz von $\mathbf{x}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{y}$ AA-Teilnetz von $\mathbf{x}$.

(b) * Zeigen Sie, dass die umgekehrten Implikationen in (a) schon für $(X,\tau) = (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ nicht gelten.

(c) * Seien $\mathcal{F} = \mathrm{Filt}(\mathbf{x})$, $\mathcal{G} = \mathrm{Filt}(\mathbf{y})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) Für alle $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ gilt $F \cap G \neq \emptyset$,

  (ii) $\mathcal{M} = \{S \subseteq X;\ \text{es gibt } F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G} : F \cap G \subseteq S\}$ ist ein Filter,

  (iii) Es gibt einen Filter $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$,

  (iv) Es gibt ein Netz, dass AA-Teilnetz von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist.

  (v) Es gibt ein Netz $\mathbf{z}$, dass Teilnetz von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist.

Zeigen Sie auch, dass man das Teilnetz $\mathbf{z}$ aus (v) in diesem Fall so wählen kann, dass für jedes gemeinsame AA-Teilnetz $\mathbf{w}$ von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ schon $\mathbf{w}$ ein AA-Teilnetz von $\mathbf{z}$ ist.

(d) Falls $\mathbf{y}$ ein AA-Teilnetz von $\mathbf{x}$ ist, gibt es ein Teilnetz $\mathbf{z}$ von $\mathbf{x}$ mit $\mathrm{Filt}(\mathbf{y}) = \mathrm{Filt}(\mathbf{z})$.
(*Hinweis: Sie sollten* (c) *benutzen (und dürfen das natürlich auch, ohne* (c) *selbst zu zeigen.)*)

Aufgabe 35 (1+2+1=4 Punkte)

(Definition der Quotiententopologie und erste Eigenschaften)

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Weiter sei die Menge $X/_\sim = \{[x]\ ;\ x \in X\}$ der Äquivalenzklassen mit der von der Abbildung $q\colon X \to X/_\sim$, $x \mapsto [x]$ induzierten Finaltopologie τ versehen (Aufgabe 26). Außerdem sei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen und $R = \{(x,y) \in X \times X\ ;\ x \sim y\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist τ Hausdorffsch, so ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen.

(bitte wenden)

(b) q ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ die Menge

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(A) \cap R) \subset X$$

abgeschlossen ist.

(*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $F \subset X/_\sim$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $q^{-1}(F) \subset X$ abgeschlossen ist.*)

(c) Ist X ein kompakter Hausdorffraum und ist $R \subset X \times X$ abgeschlossen, so ist q abgeschlossen.

Aufgabe 36 **(2+2=4 Punkte)**

(Diagonalisierungstrick und eine Anwendung auf eine abzählbare Version des Satzes von Tychonoff für Folgenkompaktheit)

Sei $(X_m, \tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge topologischer Räume und $X = \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$ versehen mit der Produkttopologie.

(a) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = ((x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Sei eine Teilfolge $(x^{(n_k^{(0)})})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben so, dass $(x_0^{(n_k^{(0)})})_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich τ_0 gegen ein $x_0 \in X_0$ konvergiert. Zu jedem $m \in \mathbb{N}^*$ sei eine Teilfolge $(x^{n_k^{(m)}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x^{n_k^{(m-1)}})_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben so, dass $(x_m^{n_k^{(m)}})_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich τ_m gegen ein $x_m \in X_m$ konvergiert.
Zeigen Sie: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge, die bezüglich τ gegen $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in X$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie: X ist folgenkompakt genau dann, wenn alle (X_m, τ_m) $(m \in \mathbb{N})$ folgenkompakt sind.

Aufgabe 37 **(3 Punkte)**

(Kompakte Räume müssen nicht folgenkompakt sein)

Es sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und

$$X = \prod_{A\subset\mathbb{N}} \{0,1\} = \left\{(x_A)_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}\,;\ x_A \in \{0,1\}\right\}$$

mit der entsprechenden Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, dass (X, τ) kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.
(*Hinweis: Nehmen Sie an, dass die durch*

$$x_A^{(n)} = 1 :\Leftrightarrow n \in A \text{ und die Anzahl der Elemente von } \{k \in A; k < n\} \text{ ist gerade}$$

definierte Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ hätte und betrachten Sie die Menge $A = \{n_k; k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.)

Aufgabe 38 **(3 Punkte)**

(Punktweise beschränkte Funktionenfolgen haben ein punktweise konvergentes Teilnetz)

Sei X eine beliebige Menge und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_k\colon X \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(x)\| < \infty$$

für alle $x \in X$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass ein Teilnetz $(f_{k_\alpha})_{\alpha\in A}$ der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ existieren derart, dass $\lim_\alpha f_{k_\alpha}(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.
