UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2017/18

Blatt 9 Abgabetermin: Mittwoch, 3.01.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 39 (4 Punkte)

(Gleichmäßige Grenzwerte von Netzen stetiger Funktionen sind stetig)

Sei (X,τ) ein topologischer Raum, (Y,d) ein metrischer Raum und $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y; f \text{ ist stetig }\}.$$

Zeigen Sie: Konvergiert $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$, d.h. gilt

$$\sup_{x\in X} d(f(x), f_\alpha(x)) \xrightarrow{\alpha} 0,$$

so ist f stetig.

Für topologische Räume X,Y heißt eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ eigentlich*, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.*

Aufgabe 40 (3+3+2+2*=8+2* Punkte)

(Zusammenhang der Begriffe eigentlich, offen, abgeschlossen, stetig)

(a) Finden Sie jeweils eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : (A, \tau_{|\cdot|}) \to (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ so, dass gelten:

 (i) f ist stetig, aber nicht eigentlich,

 (ii) Es ist $f^{-1}(K)$ kompakt für alle Kompakta $K \subseteq \mathbb{R}$, aber f ist nicht eigentlich,

 (iii) f ist abgeschlossen, aber es gilt nicht, dass $f^{-1}(K)$ kompakt ist für alle kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$.

Seien X, Y nun lokalkompakte Hausdorffräume mit den Einpunktkompaktifizierungen $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ und $\hat{Y} = Y \cup \{\infty\}$.

(b) Sei $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann eigentlich ist, wenn die durch

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{,falls } x \in X \\ \infty & \text{,falls } x = \infty \end{cases}$$

definierte Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ von f stetig ist.

(bitte wenden)

(c) Zeigen Sie, dass jede eigentliche Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen ist.

(d) * Finden Sie eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, die eigentlich, aber nicht abgeschlossen ist.

Ein topologischer Raum heißt abzählbar im Unendlichen *oder σ-kompakt, falls er abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen ist.*

Aufgabe 41 **(3+1 = 4 Punkte)**

(Kompakte Ausschöpfung σ-kompakter Räume)

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit Einpunktkompaktifizierung $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen in X gibt, so dass

(i) $\overline{U_n}$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

(*Hinweis: Korollar 7.13.*)

(b) X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn der Punkt ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis in $\hat{X}$ besitzt.
