Analysis I

Jörg Eschmeier

Universität des Saarlandes

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1 Induktion

Wir bezeichnen mit

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\
\mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\right\}
\end{aligned}
$$

die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Sind A, B beliebige Mengen, so schreiben wir

$$
\begin{aligned}
&x \in A && \text{für “}x\text{ ist ein Element von }A\text{“}, \\
&A \subset B && \text{für “jedes }x \in A\text{ gehört auch zu }B\text{“}, \\
&A \cup B && = \{x;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}, \\
&A \cap B && = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\}.
\end{aligned}
$$

Ist $A \subset B$, so nennt man

$$B \setminus A = \{x \in B |\, x \notin A\}$$

das Komplememt von A in B. Ist $A \subset X$ gegeben als Teilmenge einer fest vorgegebenen Menge X, die aus dem Zusammenhang heraus klar ist, so schreibt man

$$A^c = \{x \in X;\ x \notin A\}$$

für das Komplement von A in X.

Eine Abbildung (Funktion)

$$f : A \to B, x \mapsto f(x)$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ einer Menge A ein Element $f(x) \in B$ einer Menge B zuordnet. Man nennt f

- injektiv, falls aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$ ist,
- surjektiv, falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$,
- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so schreibt man $f^{-1} : B \to A$ für die Funktion mit

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ für alle } y \in B \qquad \text{(Umkehrfunktion).}$$

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und sind $M \subset A$, $N \subset B$ Teilmengen, so nennt man die Menge

$$f(M) = \{f(x);\ x \in M\}$$

das Bild von M unter f und die Menge

$$f^{-1}(N) = \{x \in A;\ f(x) \in N\}$$

das Urbild von N unter f.

Sind $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen, so nennt man die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x)).$$

die Komposition von g und f.

Wir setzen voraus, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen das folgende Axiom erfüllt:

Peano-Axiom: Ist $n_0 \in \mathbb{N}$ und ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

(i) $n_0 \in M$,

(ii) aus $n \in M$ und $n \geq n_0$ folgt, dass $n + 1 \in M$,

so gilt $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\} \subset M$.

Auf diesem Axiom beruht die Gültigkeit des **Induktionsprinzips**:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Möchte man zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $E(n)$ gilt, genügt es zu zeigen:

(i) $E(n_0)$ ist richtig,

(ii) ist $n \geq n_0$ und gilt die Aussage $E(n)$, so gilt auch die Aussage $E(n + 1)$.

Beispiel: Wir wollen durch Induktion zeigen, dass die Formel

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. Induktionsanfang $n = 0$: Offensichtlich gilt die Formel für $n = 0$.
Induktionsschritt $n \to n + 1,\ n \geq 0$:

Induktionsvoraussetzung : Sei $0 + 1 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ schon gezeigt.

Induktionsschluss : Es gilt

$$0 + 1 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

□

Summen und Produktzeichen: Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und sind $a_m, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n} a_j &= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n, \\ \prod_{j=m}^{n} a_j &= a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.\end{aligned}$$

Für $a_m, \dots, a_n,\ b_m, \dots, b_n \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$ gilt:

(i) $\left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right) + \left(\sum_{j=m}^{n} b_j\right) = \sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j)$,

(ii) $c\left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right) = \sum_{j=m}^{n} (ca_j)$,

(iii) $\sum_{j=m-k}^{n-k} a_{j+k} = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

Die Eigenschaften (i) und (iii) gelten entsprechend auch für Produkte.

Für $n < m$ definiert man:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = 0, \ \prod_{j=m}^{n} a_j = 1.$$

Wir erinnern an die Definition der *Binomialkoeffizienten*.

Definition 1.1. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad (n - \textit{Fakultät}).$$

Gemäß der oben erklärten Konvention über rückläufige Produkte ist $0! = 1$.

Satz 1.2. *Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine n-elementige Menge. Dann ist $n!$ gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die n Elemente $x_1, \dots, x_n$ auf n Plätze zu verteilen.*

Beweis. (Induktion nach n)

Induktionsanfang $n = 1$: Für $n = 1$ gibt es offensichtlich $1 = 1!$ Möglichkeiten, ein Element x_1 auf einen Platz zu verteilen.

Induktionsschritt $n \to n + 1,\ n \geq 1$:

Induktionsvoraussetzung: Wir setzen voraus, dass die Aussage für n gezeigt ist.

Induktionsschluss: Sei $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ eine $(n + 1)$-elementige Menge. Auf Platz 1 kann man setzen

$$x_1 \text{ oder } x_2 \text{ oder } \ldots x_{n+1}.$$

Zu jeder dieser $n+1$ Möglichkeiten gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten, die übrigen n Elemente auf die restlichen n Plätze zu verteilen. Insgesamt gibt es also $(n+1)n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. $\square$

Definition 1.3. Für $n, k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \quad (\textit{Binomialkoeffizienten}).$$

Aus der Definition folgt:

(i) Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} = 0$, denn es ist $n - k + 1 \leq 0 \leq n$.

(ii) Für $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(iii) Insbesondere ist $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.4. *Für $1 \leq k \leq n$ gilt:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Für $k = n$ gilt $\binom{n}{n} = 1 = 1 + 0 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$.
Für $1 \leq k \leq n-1$ ist

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad \square\end{aligned}$$

Satz 1.5. *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist*

$$\binom{n}{k} = \textit{Anzahl der } k\textit{-elementigen Teilmengen von } \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. (Induktion)
(IA) $n = 1$:
Für $n = 1$ und $k = 1$ hat die einelementige Menge $\{1\}$ genau eine einelementige Teilmenge und es gilt auch $\binom{1}{1} = 1$.
(IS) $n \to n+1,\ n \geq 1$:
Wir setzen voraus, dass die Behauptung für eine Zahl $n \geq 1$ gezeigt ist.
Sei $k \in \{1, \ldots, n+1\}$.
Für $k = 1$ ist $\binom{n+1}{1} = n + 1$ gleich der Anzahl der 1-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$.
Für $k = n+1$ ist $\binom{n+1}{n+1} = 1$ gleich der Anzahl der $(n+1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$.
Für $k = 2, \ldots, n$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 1.4

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } \{1, \ldots, n+1\} \\ = \;&\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen } A \subset \{1, \ldots, n+1\} \text{ mit } n+1 \in A \\ &+ \text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen } A \subset \{1, \ldots, n+1\} \text{ mit } n+1 \notin A \\ = \;&\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Diese Beobachtung beendet den Beweis. $\square$

Als Folgerung erhält man insbesondere, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ ist für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

Satz 1.6 (Binomialtheorem)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. (Induktion)

(IA) $n = 0$:

Es ist $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0}$.

(IS) $n \to n+1,\ n \geq 0$:

Sei die Behauptung gezeigt für n. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Lemma 1.4 benutzt. □

Satz 1.7 (Geometrische Summen)**.** *Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. (Induktion)

(IA) $n = 0$:

Für $n = 0$ ist $\sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$.

(IS) $n \to n+1,\ n \geq 0$:

Sei die Behauptung gezeigt für n. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Diese Beobachtung beendet den induktiven Beweis. □

2 Körperaxiome

Definition 2.1. Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \quad & K \times K \longrightarrow K, (x,y) \mapsto x+y \qquad (\textit{Addition}) \\ \cdot \ : \quad & K \times K \longrightarrow K, (x,y) \mapsto x \cdot y \qquad (\textit{Multiplikation}) \end{aligned}$$

heißt *Körper*, falls

(K1) K mindestens zwei Elemente hat,

(K2) für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} &(x+y)+z = x+(y+z),\ (xy)z = x(yz) && (\textit{Assosiativgesetze}), \\ &x+y = y+x,\ xy = yx && (\textit{Kommutativgesetze}), \\ &x(y+z) = xy + xz, && (\textit{Distributivgesetz}), \end{aligned}$$

(K3) es Elemente $0, 1 \in K$ gibt so, dass für alle $x \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} &x + 0 = x,\ x1 = x, \\ &\text{für alle } x \in K \text{ existiert ein } x' \in K \text{ mit } x + x' = 0, \\ &\text{für alle } x \in K^* = K \setminus \{0\} \text{ existiert ein } x^* \in K \text{ mit } xx^* = 1 \quad . \end{aligned}$$

Die Elemente $0, 1$ in (K3) nennt man *neutrale Elemente*, die Elemente x', x^* *inverse Elemente* bezüglich der Addition und Multiplikation.

Bemerkung 2.2. (a) Die Elemente $0, 1$ in (K3) sind eindeutig bestimmt.

(b) Zu jedem $x \in K$ gibt es genau ein $x' \in K$ mit $x + x' = 0$.

(c) Zu jedem $x \in K^*$ gibt es genau ein $x^* \in K$ mit $xx^* = 1$.

(d) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x+y)z = xz + yz$.

Beweis. (a) Ist auch $\tilde{0} \in K$ ein Element mit $x + \tilde{0} = x$ für alle $x \in K$, so gilt:

$$\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0.$$

Genauso folgt die Eindeutigkeit des Einselementes 1.

(b) Sind $x, x', x'' \in K$ mit $x + x' = 0 = x + x''$, so folgt

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' \\ &= (x + x') + x'' = 0 + x'' = x'' + 0 = x''. \end{aligned}$$

(c) Die Eindeutigkeit des multiplikativen Inversen folgt analog zu (b).

(d) Für $x, y, z \in K$ gilt:

$$(x+y)z = z(x+y) = zx + zy = xz + yz. \qquad \square$$

Für $x, y \in K,\ z \in K^*$ schreibt man

$$-x \text{ für das Element } x' \in K \text{ mit } x + x' = 0,$$
$$x - y \text{ statt } x + (-y),$$
$$z^{-1} \text{ für das Element } z^* \in K \text{ mit } zz^* = 1,$$
$$\tfrac{x}{z} \text{ statt } xz^{-1}.$$

Satz 2.3. *Sei K ein Körper.*

(a) Für $a, b \in K$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung x, nämlich $x = b - a$.

(b) Für $a \neq 0$ und $b \in K$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung x, nämlich $x = ba^{-1}$.

(c) Für $a, b \in K$ ist $ab = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

(d) Es gilt $-0 = 0,\ 1 \neq 0$ und $1^{-1} = 1$.

Für $x, y \in K, z, w \in K^*$ gilt:

(e) $-(-x) = x,\ (z^{-1})^{-1} = z$,

(f) $-(x + y) = -x - y,\ (zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1} = z^{-1}w^{-1}$,

(g) $(-x)y = -(xy),\ (-x)(-y) = xy$.

Beweis. (a) Seien $a, b \in K$. Wegen

$$a + (b - a) = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b$$

hat die Gleichung $a + x = b$ eine Lösung. Ist $x \in K$ eine Lösung, so gilt:

$$x = ((-a) + a) + x = (-a) + (a + x) = (-a) + b = b + (-a) = b - a.$$

(b) Teil (b) folgt genauso wie der Beweis von (a), indem man die Addition durch die Multiplikation und $-a$ durch a^{-1} ersetzt.

(c) Seien $a, b \in K$. Zu zeigen ist:

(i) Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so ist $ab = 0$.

(ii) Ist $ab = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Zum Beweis von (i) beachte, dass aus

$$0b + 0 = 0b = (0 + 0)b = 0b + 0b$$

mit dem Eindeutigkeitsteil von (a) die Identität $0 = 0b$ folgt. Entsprechend erhält man, dass $a0 = 0$ gilt.

Zum Beweis von (ii) beachte, dass aus $ab = 0$ und $a \neq 0$ folgt

$$b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

(d) Aus $0+0=0$ folgt, dass $-0=0$ ist. Wäre $1=0$, so wäre

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$$

für alle $x \in K$ und K würde im Widerspruch zum Körperaxiom (K1) nur aus dem Nullelement bestehen. Wegen $1 \cdot 1 = 1$ ist $1^{-1} = 1$.

(e) Wegen $(-x)+x = x+(-x) = 0$ ist $-(-x) = x$. Genauso folgt aus $(z^{-1})z = z(z^{-1}) = 1$, dass $(z^{-1})^{-1} = z$ ist.

(f) Wegen $(x+y)+(-x-y) = (x+y)+(-y-x) = x+(y+(-y-x)) = x+((y+(-y))-x) = x+(0-x) = x-x = 0$ ist $-(x+y) = -x-y$.

Die entsprechende Aussage für die Multiplikation folgt genau so aus

$$zw(w^{-1}z^{-1}) = z(w(w^{-1}z^{-1})) = z((ww^{-1})z^{-1}) = z(1z^{-1}) = 1.$$

(g) Die beiden Behauptungen folgen aus

$$(xy)+(-x)y = (x-x)y = 0y = 0,$$

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -((-y)x) = -(-(yx)) = yx = xy. \qquad \square$$

Definition 2.4. Für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p \leq q$ und $a_p, \ldots, a_q \in K$ definiert man

$$\begin{aligned} \sum_{i=p}^{q} a_i &= (\ldots(((a_p + a_{p+1}) + a_{p+2}) + a_{p+3})\ldots) + a_q, \\ \prod_{i=p}^{q} a_i &= (\ldots(((a_p a_{p+1}) a_{p+2})\, a_{p+3})\ldots)\, a_q. \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung der Gesetze kann man induktiv nach der Länge der Summen (Produkte) die Gültigkeit der in (K2) verlangten Eigenschaften auf beliebig lange, endliche Summen (Produkte) verallgemeinern.

Allgemeines Assoziativgesetz: Alle möglichen Beklammerungen von

$$a_p + \ldots + a_q \text{ und } a_p \cdot \ldots \cdot a_q$$

führen zum selben Ergebnis.

Allgemeines Kommutativgesetz: Ist $\{i_p, \ldots, i_q\} = \{p, \ldots, q\}$, so gilt:

$$a_{i_p} + \ldots + a_{i_q} = a_p + \ldots + a_q \text{ und } a_{i_p} \cdot \ldots \cdot a_{i_q} = a_p \cdot \ldots \cdot a_q.$$

Allgemeines Distributivgesetz: Für $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_m \in K$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right).$$

Beweise findet man etwa in Kapitel I des Buches “ Differential- und Integralrechnung I“ von Grauert und Lieb.

Definition 2.5. Sei K ein Körper und seien $x \in K,\ n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Man definiert

$$x^0 = 1,\ x^n = x \cdot \ldots \cdot x\ (n\text{-mal}),\ x^{-n} = (x^{-1})^n \text{ für } x \neq 0$$

und entsprechend

$$0_{\mathbb{N}} \cdot x = 0_K,\ nx = x + \ldots + x\ (n\text{-mal}),\ (-n)x = n(-x).$$

Satz 2.6 (Potenzgesetze)**.** *Für $a, b \in K$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) $a^n b^n = (ab)^n$,

(ii) $a^n a^m = a^{n+m}$,

(iii) $(a^n)^m = a^{nm}$.

Für $a, b \in K^*$ gelten dieselben Aussagen für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung durch Induktion.
(IA) $n = 0$:
Es ist $a^0 b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (ab)^0$.
(IS) $n \to n+1,\ n \geq 0$:
Ist die Behauptung für n gezeigt, so folgt

$$a^{n+1} b^{n+1} = (a^n a)\ (b^n b) = (a^n b^n) ab = (ab)^n (ab) = (ab)^{n+1}.$$

Seien $a, b \in K^*$ und $n \in \mathbb{N},\ n > 0$. Der Rest von (i) folgt aus

$$a^{-n} b^{-n} = (a^{-1})^n (b^{-1})^n = (a^{-1} b^{-1})^n = ((ab)^{-1})^n = (ab)^{-n}.$$

(ii) Für $n = 0$ oder $m = 0$ gilt die Aussage offensichtlich.
Für $n, m > 0$ folgt die Behauptung aus dem allgemeinen Assoziativgesetz.
Sei $a \neq 0$ und seien $n, m > 0$. Dann gilt

$$a^{-m} a^{-n} = (a^{-1})^m (a^{-1})^n = (a^{-1})^{m+n} = a^{-m+(-n)}.$$

Für $m \leq n$ gilt

$$a^{-m} a^n = (a^{-1})^m a^m a^{n-m} = (a^{-1} a)^m a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

Für $m > n$ ist

$$a^{-m} a^n = (a^{-1})^{m-n} (a^{-1})^n a^n = (a^{-1})^{m-n} (a^{-1} a)^n = a^{-m+n}.$$

Den letzten übrig bleibenden Fall erhält man mit dem Kommutativgesetz

$$a^m a^{-n} = a^{-n} a^m = a^{-n+m} = a^{m-n}.$$

(iii) Folgt durch ähnliche Fallunterscheidungen. □

Beispiele 2.7. (1) Wir setzen voraus, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper sind. Man kann $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ so konstruieren, dass die Körperaxiome erfüllt sind. Dies wird in späteren Vorlesungen klar werden.

(2) Man kann leicht nachprüfen, dass $K = \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \ 0 + 1 = 1 + 0 = 1,$$

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \ 1 \cdot 1 = 1$$

ein Körper ist.

3 Anordnungsaxiome

Für uns ist $\mathbb{R}$ ein Körper, in dem gewisse Elemente als *positiv* ausgezeichnet sind (geschrieben: $a > 0$) und so, dass die folgenden *Anordnungsaxiome* gelten:

(A01) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der drei Fälle

$$a > 0, \;\; a = 0, \;\; -a > 0.$$

(A02) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt auch

$$a + b > 0 \text{ und } ab > 0.$$

Ein solcher Körper heißt *angeordneter Körper.*

Definition 3.1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} &a > b \text{ (oder } b < a), \quad \text{falls } a - b > 0 \text{ ist,} \\ &a \geq b \text{ (oder } b \leq a), \quad \text{falls } a - b > 0 \text{ oder } a - b = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Wir nennen die Elemente aus

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R};\; x > 0\}$$

die *positiven Zahlen* in $\mathbb{R}$ und die Elemente aus

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\; x \geq 0\}$$

die *nicht-negativen* reellen Zahlen.

Folgerung 3.2. *Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) Für $a, b \geq 0$ ist auch $a + b \geq 0$ und $ab \geq 0$. Ist zusätzlich $a > 0$ oder $b > 0$, so gilt auch $a + b > 0$.

(ii) Es ist $a \geq a$ (Reflexivität).

(iii) Ist $a \geq b$ und $b \geq a$, so ist $a = b$ (Antisymmetrie).

(iv) Ist $a \geq b$ und $b \geq c$, so ist $a \geq c$ (Transitivität).
Gilt in der Voraussetzung zusätzlich mindestens einmal "$>$", so folgt auch $a > c$.

(v) Ist $a \neq 0$, so ist $a^2 > 0$. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

Beweis. (i) Die Voraussetzung $a \geq 0$ und $b \geq 0$ bedeutet, dass genau einer der vier Fälle "$a > 0$ und $b > 0$" oder "$a > 0$ und $b = 0$" oder "$a = 0$ und $b > 0$" oder "$a = 0$ und $b = 0$" vorliegt. In den ersten drei Fällen ist $a + b > 0$, im letzten Fall ist $a + b = 0$. Für die Multiplikation argumentiert man entsprechend.

(ii) Teil (ii) ist klar, da $a - a = 0$ ist.

(iii) Aus $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt $a - b \geq 0$ und $-(a - b) = b - a \geq 0$. Wegen des ersten Anordnungsaxioms (A01) muss $a - b = 0$ sein.

(iv) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt mit Teil (i), dass $a - c = (a - b) + (b - c) \geq 0$ ist. Auch der Zusatz folgt aus Teil (i).

(v) Ist $a \neq 0$, so ist nach (A01) $a > 0$ oder $-a > 0$ und daher $a^2 = (-a)^2 > 0$ nach dem zweiten Anordnungsaxiom (A02). □

Satz 3.3. *Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) Ist $a \geq b$, so ist auch $a + c \geq b + c$.

(ii) Ist $a \geq b$ und $c \geq 0$, so ist $ac \geq bc$. Ist $a \geq b$ und $c \leq 0$, so ist $ac \leq bc$.

Alles bleibt richtig, wenn man überall "$\geq$" durch "$>$" und "$\leq$" durch "$<$" ersetzt.

Beweis. (i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b$ gilt $(a + c) - (b + c) = a - b \geq 0$, also $a + c \geq b + c$.

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b$ und $c \geq 0$ ist $ac - bc = (a - b)c \geq 0$, also $ac \geq bc$. Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt, dass $bc - ac = (b - a)c = (a - b)(-c) \geq 0$, also $bc \geq ac$.

Den Zusatz beweist man ganz genauso. □

Satz 3.4. *Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.*

(a) Gilt $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ so ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Hier gilt "$<$", wenn außerdem $a_i < b_i$ ist für mindestens ein i.

(b) Gilt $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Hier gilt "$<$", wenn außerdem alle $b_i > 0$ sind und $a_i < b_i$ ist für mindestens ein i.

Beweis. Wir beweisen beide Teile durch Induktion nach n. Für $n = 1$ sind die Aussagen in (a) und (b) offensichtlich richtig. Ist Teil (a) für Summen der Länge $n - 1$ gezeigt und sind $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Satz 3.3

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + b_n.$$

Gilt außerdem $a_i < b_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ oder $a_n < b_n$, so ist die erste oder zweite Ungleichung strikt.

Ist Teil (b) für Produkte der Länge $n-1$ gezeigt und gilt $0 \le a_i \le b_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Satz 3.3

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) a_n \le \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right) a_n \le \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right) b_n.$$

Sind außerdem alle $b_i > 0$, so darf man zum Beweis des Zusatzes annehmen, dass auch alle $a_i > 0$ sind. Gilt dann $a_i < b_i$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ oder $a_n < b_n$, so ist die erste oder zweite Ungleichung zwischen den Produkten strikt. □

Folgerung 3.5. *Aus Teil (b) von Satz 3.4 folgt direkt, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^n$$

streng monoton wächst (das heißt für $0 \le x < y$ ist $f(x) < f(y)$).

Satz 3.6. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) Ist $a > 0$, so ist auch $\frac{1}{a} > 0$.

(b) Ist $0 < a < b$, so ist $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(c) Es ist $1 > 0$.

Beweis. In Folgerung 3.2 haben wir bereits begründet, dass $1 > 0$ ist. Sei $a > 0$. Die Annahme $\frac{1}{a} \le 0$ führt zu dem Widerspruch, dass $1 = a\frac{1}{a} \le a \cdot 0 = 0$ gelten müßte. Ist $0 < a < b$, so folgt $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (b-a)\ \frac{1}{ab} > 0$. Hierfür haben wir Teil (a) und das zweite Anordnungsaxiom benutzt. □

Definition 3.7 (*Absolutbetrag*)**.** Für $a \in \mathbb{R}$ nennt man die Zahl

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \ge 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

den *Betrag* von a.

Man sieht direkt, dass immer $|a| \ge 0,\ |a| = |-a|$ und $a \le |a|, -a \le |a|$ gilt.

Satz 3.8. *Für $a, c \in \mathbb{R}$ gilt $-c \le a \le c$ genau dann, wenn $|a| \le c$ ist.*

Beweis. Gilt $a \le c$ und $-c \le a$, so ist $a \le c$ und $-a \le c$, also auch $|a| \le c$. Gilt umgekehrt $|a| \le c$, so ist $a \le |a| \le c$ und $-a \le |-a| = |a| \le c$, also $-c \le a \le c$. □

Die wichtigsten Eigenschaften des Absolutbetrages fassen wir im nächsten Satz zusammen.

Satz 3.9. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0$ *ist äquivalent zu* $a = 0$.

(ii) $|ab| = |a|\ |b|$.

(iii) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis. Der Teil (i) gilt offensichtlich. Zum Beweis von (ii) unterscheide man die drei Fälle $ab > 0,\ ab = 0,\ ab < 0$ und beachte, dass $|ab| \in \{\pm ab\}$ ist.
In (iii) beweisen wir zunächst die zweite Ungleichung. Nach Satz 3.8 gilt:

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ und } -|b| \leq b \leq |b|.$$

Mit Satz 3.4(a) folgt hieraus, dass

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

ist. Mit Satz 3.8 folgt die Gültigkeit der zweiten Ungleichung. Aus den beiden Ungleichungen

$$|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|,$$

$$|b| = |(a + b) + (-a)| \leq |a + b| + |a|$$

folgt $-|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$, also mit Satz 3.8 die erste Ungleichung. □

Definition 3.10 (*Intervalle*)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man die Mengen

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}, \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\},\ [a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}, \\ ]a, b[&= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} \end{aligned}$$

die *abgeschlossenen*, *halboffenen*, *offenen Intervalle* von a bis b. Man schreibt auch

$$(a, b],\ [a, b),\ (a, b) \text{ statt }]a, b],\ [a, b[,\ ]a, b[.$$

Satz 3.11 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir benutzen Induktion nach n. Für $n = 0$ ist

$$(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0x.$$

Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R},\ x \geq -1$, gilt, so folgt für jede solche Zahl x

$$(1 + x)\ (1 + x)^n \geq (1 + x)\ (1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir möchten als nächstes zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}_+^*$ der Ausdruck $(1+x)^n$ beliebig groß wird, das heißt für jedes $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(1+x)^n > K$ existiert. Wegen der Bernoullischen Ungleichung (Satz 3.11) genügt es, dass $nx > K - 1$ ist. Findet man zu $x,\ K > 0$ immer ein solches n? Es gibt tatsächlich angeordnete Körper, in denen positive Elemente $x > 0,\ K > 0$ existieren so, dass für kein $n \in \mathbb{N}$

$$nx > K - 1$$

ist. Wir brauchen ein weiteres Axiom.

Archimedisches Axiom:

Die reellen Zahlen bilden einen angeordneten Körper so, dass für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $y \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $nx > y$.

Satz 3.12. *Sei $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 1$. Dann gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}_+^*$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R^n > K$.*

Beweis. Für $R > 1$ ist $x = R - 1 > 0$ und nach dem Archimedischen Axiom gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$nx > K - 1.$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 3.11) erhält man die Abschätzung

$$R^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > K.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Korollar 3.13. *Sei $0 < r < 1$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r^n < \epsilon$.*

Beweis. Ist $0 < r < 1$, so ist $R = \frac{1}{r} > 1$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R^n > \frac{1}{\epsilon}$. Mit Satz 3.6 folgt, dass

$$r^n = \left(\frac{1}{R}\right)^n = \frac{1}{R^n} < \epsilon$$

gilt. □

Definition 3.14. Sei $M \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Man nennt

(i) a das *Maximum* von M (geschrieben $a = \max M$), falls $a \in M$ ist und $x \leq a$ für alle $x \in M$ gilt,

(ii) a das *Minimum* von M (geschrieben $a = \min M$), falls $a \in M$ ist und $x \geq a$ für alle $x \in M$ gilt.

Bemerkung. (a) Endliche Mengen $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ besitzen ein Maximum und Minimum. Dies folgt aus dem Anordnungsaxiom (A01) mit Induktion nach der Zahl der Elemente von M.
(b) Unendliche Mengen $M \subset \mathbb{R}$ brauchen weder ein Maximum noch ein Minimum zu haben. Beispiele sind $\mathbb{Z}$ oder $]0,1[$ (Beachte, dass für $x \in]0,1[$ gilt $0 < \frac{x}{2} < x < \frac{x+1}{2} < 1$).

Satz 3.15. *Für $x \in \mathbb{R}$ besitzt die Menge*

$$M = \{m \in \mathbb{Z};\ m \leq x\}$$

ein Maximum. Wir schreiben $[x] = \max M$.

Beweis. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit

$$q = q \cdot 1 > x \text{ und } p = p \cdot 1 > -x,$$

also mit $-p < x < q$. Die Menge

$$\tilde{M} = \{m \in \mathbb{Z};\ -p \leq m \leq x\} \subset [-p, q] \cap \mathbb{Z}$$

ist endlich und nicht leer. Also existiert $\mu = \max \tilde{M}$ und offensichtlich gilt auch $\mu = \max M$. □

Bemerkung.
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x - 1 < [x] \leq x$. Dabei gilt die erste Ungleichung, da sonst $[x] + 1 \leq x$ folgen würde.

Korollar 3.16. *Jedes Intervall positiver Länge enthält unendlich viele rationale Zahlen.*

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Da für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\bigcup_{k=0}^{n-1}]a + \frac{k}{n}(b-a),\ a + \frac{k+1}{n}(b-a)[\ \subset\ ]a, b[,$$

wobei die Intervalle links paarweise disjunkt sind, genügt es zu zeigen, dass $]a, b[$ mindestens eine rationale Zahl enthält. Da $b - a > 0$ ist, gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $q \in \mathbb{N}$ mit $q(b-a) > 1$. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \in]qa, qb$ ($p = [qb] - 1$ hat diese Eigenschaft). Wegen

$$a < \frac{p}{q} < b$$

ist die gewünschte rationale Zahl in $]a, b[$ gefunden. □

4 Konvergenz von Folgen

Definition 4.1. Sei M eine Menge. Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ ein $a_n \in M$ gegeben, so nennt man die Abbildung

$$\{n \in \mathbb{Z};\ n \geq n_0\} \to M,\ n \mapsto a_n$$

eine *Folge in M*. Abkürzend schreibt man für eine solche Abbildung auch

$$(a_n)_{n \geq n_0} \text{ oder } (a_{n_0},\ a_{n_0+1},\ a_{n_0+2} \ldots).$$

Einfache Beispiele von Folgen sind

(i) die konstanten Folgen $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$,

(iii) geometrische Folgen $a_n = r^n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit beliebigen festen $r \in \mathbb{R}$.

Definition 4.2 (*Konvergenz*)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Man sagt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen a* (geschrieben: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $(a_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a$), falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0.$$

Man sagt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert*, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen keine reelle Zahl konvergiert. Entsprechend definiert man die Konvergenz von Folgen $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Beispiele 4.3. (1) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge mit $a_n = a$ für alle n, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Denn für jedes $\epsilon > 0$ gilt $|a_n - a| = 0 < \epsilon$ für alle $n \geq 0$. Also kann man $n_0 = 0$ wählen für jedes $\epsilon > 0$.

(2) Für die harmonische Folge gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn zu $\epsilon > 0$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.

(3) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a_n = (-1)^n c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die so definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Wir beweisen diese Aussage durch Widerspruch. Wäre $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für eine reelle Zahl a, so würde es zu $\epsilon = |c| > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ würde folgen, dass

$$2|c| = |a_n - a_{n+1}| = |(a_n - a) + (a - a_{n+1})| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 2\epsilon = 2|c|.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(4) Für die durch $a_n = \frac{n^2+1}{n^2+2} (n \in \mathbb{N})$ definierte Folge gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Denn für $n \geq 1$ ist

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2+1}{n^2+2} - 1\right| = \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n},$$

und nach (2) gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Für $n \geq n_0$ folgt dann

$$|a_n - 1| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

(5) Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| < 1$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. Denn ist $\epsilon > 0$, so gibt es nach Korollar 3.13 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|c|^{n_0} < \epsilon$ und für alle $n \geq n_0$ folgt $|c^n| = |c|^n = |c|^{n-n_0}|c|^{n_0} \leq |c|^{n_0} < \epsilon$.

Satz 4.4 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und gegen $b \in \mathbb{R}$, so ist $a = b$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz gibt es zu $\frac{\epsilon}{2} > 0$ Indizes $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und $|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Für $n = \max(n_1, n_2)$ gilt dann

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also ist $|a - b| < \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$. Dies impliziert, dass $a = b$ ist. □

Definition 4.5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man nennt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls ein $A \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n \geq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$). In diesem Fall nennt man A eine *obere* (bzw. *untere*) Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Bemerkung.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Absolutbeträge beschränkt ist. Dies sieht man folgendermaßen. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle n. Für $M = \max(|A|, |B|)$ gilt dann

$$-M \leq -|A| \leq A \leq a_n \leq B \leq |B| \leq M$$

und damit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Satz 3.8).
Ist umgekehrt $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 3.8 folgt, dass $-A \leq a_n \leq A$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.6. *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \text{ für alle } n > n_0.$$

Für $n > n_0$ gilt dann

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Setzt man $M = \max\{1 + |a|,\ |a_0|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, so ist

$$|a_n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Die Umkehrung von Satz 4.6 ist natürlich falsch. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nach Teil (3) von Beispiel 4.3 divergent.

Satz 4.7 (Grenzwertsätze)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ und seien $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen so, dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

ist. Dann gilt:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$*,*

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$*,*

(c) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$*.*

(d) Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes solche n_0 gilt $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$.

Beweis. (a) Sei $\epsilon > 0$. Dann existieren zu $\frac{\epsilon}{2} > 0$ Indizes $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq n_1, \ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq n_2.$$

Für alle $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 3.9, dass

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| \ |b_n| + |a| \ |b_n - b|.$$

Nach Satz 4.6 existiert eine reelle Zahl $M > |a|$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei jetzt $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ für } n \geq n_1 \text{ und } |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ für } n \geq n_2$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \ |b_n| + |a| \ |b_n - b| \leq M(|a_n - a| + |b_n - b|) < \epsilon.$$

(c) Teil (c) folgt, indem man in Teil (b) die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als die konstante Folge $b_n = \lambda$ $(n \in \mathbb{N})$ wählt.
(d) Sei $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Dann gibt es zu $\epsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung aus Satz 3.9 erhält man

$$|b_n| = |b + (b_n - b)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

für $n \geq N$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ irgendein Index mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und sei $N \in \mathbb{N}$ wie oben gewählt. Wir zeigen zunächst, dass $(\frac{1}{b_n})_{n \geq n_0}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert. Zum Beweis beachte man zuerst, dass

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = |b - b_n| \frac{1}{|b_n b|} \leq |b - b_n| \frac{2}{|b|^2}$$

für alle $n \geq \max(n_0, N)$ gilt. Ist $\epsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\epsilon \geq \max(n_0, N)$ und

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon$$

für alle $n \geq n_\epsilon$. Für diese n gilt dann

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq |b - b_n| \frac{2}{|b|^2} < \epsilon.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Mit Teil (b) folgt, dass auch

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0} = \left(a_n \frac{1}{b_n} \right)_{n \geq n_0} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

gilt. □

Beispiel 4.8. Nach den Grenzwertsätzen (Satz 4.7) gilt

$$\frac{n^4 + 2n^2 + 1}{2n^4 + 3n^3 + 1} = \frac{1 + 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{2 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1 + 2 \cdot 0 + 0}{2 + 3 \cdot 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Man beachte dabei, dass nach Teil (2) von Beispiel 4.3 und Satz 4.7(b)

$$\left(\frac{1}{n^k} \right)_{n \geq 1} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Bemerkung.
Seien $x, a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Als einfache Folgerung aus Satz 3.8 erhält man, dass $|x - a| < \epsilon$ ist genau dann, wenn $a - \epsilon < x < a + \epsilon$ gilt.

Satz 4.9 (Vergleichskriterium)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ so, dass*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$ *ist und*

(ii) ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$.

Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = x$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - x| < \epsilon \text{ für } n \geq n_1 \text{ und } |b_n - x| < \epsilon \text{ für } n \geq n_2.$$

Für alle $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, N)$ gilt dann nach der obigen Bemerkung

$$x - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < x + \epsilon.$$

Dieselbe Bemerkung zeigt, das für $n \geq n_0$ auch

$$|c_n - x| < \epsilon$$

ist. □

Satz 4.10. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$a_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq N,$$

so ist auch $a \leq b$.

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Wäre $a > b$, so gäbe es zu der positiven Zahl $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq N$, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ und } |b_n - b| < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Man erhält den Widerspruch

$$a_{n_0} > a - \epsilon = \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_{n_0}.$$

Also war die Annahme, dass $a > b$ ist falsch und die Behauptung ist bewiesen. □

Bemerkung

(a) In der Situation von Satz 4.10 kann man aus $a_n < b_n$ für alle $n \geq N$ nicht schließen, dass $a < b$ ist. Ist zum Beispiel $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist zwar $a_n < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.
(b) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und ist $a_n \leq b$ (bzw. $a_n \geq b$) für alle $n \geq N$, so ist auch $a \leq b$ (bzw. $a \geq b$). Dies folgt aus Satz 4.10, indem man eine der beiden Folgen als eine konstante Folge wählt.

Definition 4.11 (*Häufungspunkte und Teilfolgen*)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$.

(a) Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls eine streng monoton wachsende Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{k_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt Teilfolgen einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meistens in der Form $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit einer Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben.

Auf dem Peanoaxiom für $\mathbb{N}$ beruht auch die Möglichkeit, Folgen rekursiv zu definieren.

Rekursive Definition:

Sei M eine Menge und sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Um eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ in M zu definieren, genügt es

(i) $a_{n_0} \in M$ zu definieren und

(ii) für $n \geq n_0$ zu sagen, wie $a_{n+1} \in M$ definiert wird, wenn man $a_{n_0}, \dots, a_n$ schon definiert hat.

Beispiel 4.12. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt $+1$ und -1 als Häufungspunkte und hat die konvergenten Teilfolgen

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, \dots) \xrightarrow{n} 1, \ (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1, -1, \dots) \xrightarrow{n} -1.$$

Dies ist kein Zufall, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 4.13. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Die Zahl a ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.*

Beweis. Sei a Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_{k_0}| < 1$. Sind $k_0 < k_1 < \dots < k_n$ in $\mathbb{N}$ gewählt mit

$$|a - a_{k_i}| < \frac{1}{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n,$$

dann gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{n+2}$ ein $k_{n+1} > k_n$ mit

$$|a - a_{k_{n+1}}| < \frac{1}{n+2}.$$

Rekursiv erhält man eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Sei umgekehrt $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_{k_n} - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Also ist a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Satz 4.14. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Nach Satz 4.6 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Um zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt besitzt, genügt es nach Satz 4.13 zu zeigen, dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Teilfolge und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst, ist $k_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies folgt durch eine einfache Induktion. Also ist auch $|a_{k_n} - a| < \epsilon$ für $n \geq n_0$. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir *Reihen* oder *unendliche Summen* definieren.

Beispiel 4.15. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Nach Satz 1.7 ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.7) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Definition 4.16. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die n-te *Partialsumme* der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Man nennt die Folge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

die *unendliche Reihe* oder *Summe* der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Man nennt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent* mit Wert c und schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c,$$

wenn die Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

(c) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *divergent*, wenn die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beispiele 4.17. (1) Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Denn die Folge

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

konvergiert gegen 1.

(2) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt nach Beispiel 4.15

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (\textit{Geometrische Reihe}).$$

(3) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergiert, denn die Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, \ldots)$$

hat nach Satz 4.13 zwei verschiedene Häufungspunkte und ist deshalb nach Satz 4.14 divergent.

Satz 4.18. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k),\ \sum_{k=0}^{\infty}(ca_k)$ und für die Reihenwerte gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right),\ \sum_{k=0}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Wenn die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gegen a bzw. b konvergieren, dann folgt mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.7), dass

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \xrightarrow{n} a + b,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(ca_k) = c\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \xrightarrow{n} ca.$$

Also gelten die Behauptungen. □

Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, da sie nicht beschränkt ist. Aber zu jeder Zahl $R > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n > R$ für alle $n \geq n_0$. Im Sinne der folgenden Definition konvergiert die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ also uneigentlich gegen ∞.

Definition 4.19 (*Uneigentliche Konvergenz oder bestimmte Divergenz*)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man sagt, dass

(a) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uneigentlich konvergiert* (oder *bestimmt divergiert*) gegen $+\infty$ (geschrieben: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $(a_n) \xrightarrow{n} \infty$), falls für jedes $R \in \mathbb{R}_+^*$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > R$ für alle $n \geq n_0$,

(b) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uneigentlich konvergiert* (oder *bestimmt divergiert*) gegen $-\infty$ (geschrieben: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $(a_n) \xrightarrow{n} -\infty$), falls für jedes $R \in \mathbb{R}_+^*$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < -R$ für alle $n \geq n_0$.

Offensichtlich gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$ ist.

Satz 4.20. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Für jedes solche N gilt $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{1}{a_n} = 0$.

(b) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \geq N$, so ist $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{1}{a_n} = \infty$.

Beweis. (a) Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Offensichtlich gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \geq N$ mit $a_n > \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $|\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{a_n} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ nach Satz 3.6.
(b) Erfüllt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingungen von Teil (b), so gibt es zu jedem $R > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq N$ und $a_n = |a_n| < \frac{1}{R}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $\frac{1}{a_n} > R$ für alle $n \geq n_0$. □

5 Vollständigkeit

Mit der üblichen Ordnung ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ein archimedisch angeordneter Körper. Aber in $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung. Denn sonst gäbe es natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}^*$, die nicht beide gerade sind, mit $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Wegen $p^2 = 2q^2$ wäre p^2 und damit auch p gerade. Also gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2q^2 = p^2 = 4n$. Dann wären aber auch q^2 und q gerade. Also wären doch p und q beide gerade im Widerspruch zur Wahl von p und q.

Also reichen die bisherigen Axiome nicht aus, um die Existenz von Quadratwurzeln zu begründen. Wir benötigen eine weitere Eigenschaft der reellen Zahlen.

Definition 5.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ ist für alle $n, m \geq n_0$.

Satz 5.2. *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Limes a und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \epsilon$. □

Bemerkung 5.3. In $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchy-Folgen, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzen. Um dies zu begründen, zeigen wir zunächst, dass für jede vorgegebene positive reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_+^*$ die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n} + a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

eine Cauchy-Folge ist. Man beachte zunächst, dass

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n - a_{n-1} + \frac{a}{a_n} - \frac{a}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})\ (1 - \frac{a}{a_n a_{n-1}})$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Wegen

$$0 < \frac{a}{a_n a_{n-1}} = \frac{a}{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right)a_{n-1}} = 2\frac{a}{a + a_{n-1}^2} < 2$$

gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2}\,|a_n - a_{n-1}|\,\left|1 - \frac{a}{a_n a_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}\,|a_n - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_1 - a_0|$$

für alle $n \geq 1$. Für beliebige $n > m$ erhält man mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left|\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\right| \leq \sum_{i=m}^{n-1}|a_{i+1} - a_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i |a_1 - a_0| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{i=0}^{n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i |a_1 - a_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m 2|a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Da $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ eine Nullfolge ist (Beispiel 4.3(5)), folgt hieraus, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Eine einfache Überlegung zeigt, dass der Grenzwert x der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn er existiert, die Gleichung

$$x^2 = a$$

lösen muss. Da alle $a_n > 0$ sind, folgt zunächst, dass $x = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$ ist. Die Annahme, dass $x = 0$ ist, würde mit Satz 4.20(b) zu dem Widerspruch

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n} + a_n\right) = \infty$$

führen. Also ist notwendigerweise $x > 0$. Mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.7) folgt dann, dass

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n} + a_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right)$$

oder äquivalent, dass $x^2 = a$ ist.

Für $a = 2$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ haben kann.

Bemerkung 5.4. Man kann zeigen, dass zu jeder Menge M, auf der ein vernünftiger Abstandsbegriff erklärt ist, eine Menge $\tilde{M} \supset M$ existiert so, dass

(i) der Abstandsbegriff sich fortsetzen lässt auf $\tilde{M}$,

(ii) in $\tilde{M}$ jede Cauchy-Folge konvergiert und

(iii) jeder Punkt in $\tilde{M}$ Grenzwert einer Folge in M ist.

Wendet man diese Konstruktion auf $\mathbb{Q}$ mit dem durch

$$d(x, y) = |x - y|$$

definierten Abstand an, so erhält man $\mathbb{R}$. Dieser Weg ist zu lang für uns. Für uns ist $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper, der das folgende Axiom erfüllt.

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Satz 5.5. *Für $a \in \mathbb{R}_+$ besitzt die Gleichung $x^2 = a$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}_+$ (Wie üblich schreibt man $\sqrt{a}$ für die eindeutige Lösung dieser Gleichung in $\mathbb{R}_+$).*

Beweis. Sei $a > 0$. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt, dass die in Bemerkung 5.3 konstruierte Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Limes x in $\mathbb{R}$ besitzt. Wir haben gesehen, dass $x \in \mathbb{R}_+^*$ liegt und die Gleichung $x^2 = a$ löst. Da für $0 \leq x < y$ nach Folgerung 3.5 auch $x^2 < y^2$ gilt, kann diese Gleichung höchstens eine Lösung in $\mathbb{R}_+$ haben. $\square$

Auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ beruht auch die Gültigkeit des *Intervallschachtelungsprinzips.*

Satz 5.6 (Intervallschachtelungsprinzip). *Seien $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ abgeschlossene Intervalle mit $a_k \leq b_k$ und*

(i) $I_{k+1} \subset I_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$.

Dann gilt es eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $\{x\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = x = \lim_{k\to\infty} b_k$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b_k - a_k < |x - y|$. Dann können aber x und y nicht beide in dem Intervall I_k liegen. Dieses Argument zeigt, dass $\bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$ höchstens eine reelle Zahl enthält. Um zu zeigen, dass der Durchschnitt nicht leer ist, überlegen wir uns zunächst, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der linken Randpunkte eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{k_0} - a_{k_0} < \epsilon$. Da für $p, q \geq k_0$ die Zahlen a_p, a_q beide in dem Intervall I_{k_0} liegen, gilt für diese Indizes p und q

$$|a_p - a_q| \leq b_{k_0} - a_{k_0} < \epsilon.$$

Also ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $x = \lim_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{R}$. Mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.7) folgt, dass auch

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} (a_k + (b_k - a_k)) = x + 0 = x$$

ist. Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fällt, erhält man mit Satz 4.10, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$a_k \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} a_n = x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} b_n \leq b_k$$

gelten. Also ist $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$. □

Korollar 5.7 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$A \leq c_n \leq B \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir wählen rekursiv Intervalle $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$

(i) $\{n \in \mathbb{N};\ c_n \in I_j\}$ unendlich ist,

(ii) $I_j \subset I_{j-1}$ gilt mit $I_{-1} = \mathbb{R}$,

(iii) $L(I_j) = b_j - a_j = (\frac{1}{2})^j L(I_0)$ gilt.

Setze dazu $a_0 = A$, $b_0 = B$ und $I_0 = [a_0, b_0]$. Seien $I_j = [a_j, b_j]$ $(j = 0, \ldots, k)$ gewählt so, dass die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt sind für $j = 0, \ldots, k$. Falls $M_k = \{n \in \mathbb{N};\ c_n \in [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]\}$ unendlich ist, setze man

$$a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2},\ I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

Falls M_k endlich ist, definiere man

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2},\ b_{k+1} = b_k,\ I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

In beiden Fällen gelten dann die Bedingungen (i)-(iii) für $j = 0, \ldots, k+1$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 5.5) gibt es eine reelle Zahl x, mit

$$\{x\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j.$$

Wir zeigen, dass x ein Häufungspunkt der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $L(I_{n_0}) < \epsilon$. Wegen $x \in I_{n_0}$ ist

$$x - \epsilon < a_{n_0} \leq b_{n_0} < x + \epsilon.$$

Nach Konstruktion gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $c_n \in I_{n_0} \subset \,]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Definitionsgemäß ist x Häufungspunkt der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Korollar 5.8. *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent dann und nur dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt. In diesem Fall konvergiert sie gegen diesen Häufungspunkt.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen (Satz 4.14), dass die angegebene Bedingung notwendig für die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.
Sei umgekehrt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mit einem einzigen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| \geq \epsilon$. Rekursiv könnte man eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren mit

$$|a_{k_n} - a| \geq \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.6) hätte die beschränkte Folge $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $b \in \mathbb{R}$. Dann wäre aber b auch ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, der aber offensichtlich verschieden von a sein müsste. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. □

Definition 5.9. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt

(i) *(streng) monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist,

(ii) *(streng) monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 5.10. *Jede beschränkte und monoton wachsende (oder monoton fallende) Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.6) und Satz 4.13 hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{k_N} - a| < \epsilon$. Für alle $n \geq k_N$ folgt mit Satz 4.10, dass

$$a_{k_N} \leq a_n \leq a_{k_n} \leq \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\geq n}} a_{k_m} = a.$$

Also ist $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq k_N$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend, so ist $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Dann ist aber auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend (bzw. fallend), so folgt als Anwendung von Satz 4.10, dass $a_k \leq \lim_{n\to\infty} a_n$ (bzw. $a_k \geq \lim_{n\to\infty} a_n$) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir, wie man unendliche Reihen benutzen kann, um jede reelle Zahl als Dezimalzahl oder allgemeiner als *b-adischen Bruch* darzustellen.

Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Ein *b-adischer Bruch* ist definitionsgemäß eine Reihe der Form

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$ für $n \geq -k$. Für festgelegtes b schreibt man auch

$$\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots = \pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}.$$

Satz 5.11. *Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Beweis. Seien $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$ für $n \geq -k$ beliebige Ziffern. Die Partialsummenfolge

$$(s_N)_{N\geq -k} = \left(\sum_{n=-k}^{N} a_n b^{-n} \right)_{N\geq -k}$$

ist monoton wachsend und wegen

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b^{-n} \leq b \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{b}\right)^n \leq b \frac{1}{1-\frac{1}{b}}$$

beschränkt. Dabei haben wir benutzt, dass wir den Grenzwert der geometrischen Reihe zu $\frac{1}{b} \in (0, \frac{1}{2})$ kennen (Beispiel 4.17(2)). Also folgt die Behauptung mit Satz 5.9. □

Wir zeigen umgekehrt, dass sich jede reelle Zahl als b-adischer Bruch darstellen lässt.

Satz 5.12. *Ist $x \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und Ziffern $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$ für $n \geq -k$ so, dass x die Darstellung $x = \pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ besitzt.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Es genügt, die Existenz der gesuchten Darstellung von x für diesen Fall zu begründen. Mit Satz 3.12 und einem Argument ähnlich dem aus dem Beweis von Satz 3.15 folgt, dass

$$k = \min\{n \in \mathbb{N};\ x < b^{n+1}\}$$

eine wohldefinierte natürliche Zahl ist. Definitionsgemäß gilt

$$x \in \left[0, b^{k+1}\right[= \bigcup_{j=0}^{b-1} \left[jb^k, (j+1)b^k\right[.$$

Wir definieren rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\geq -k}$ in $\{0, \ldots, b-1\}$ so, dass die Folge

$$s_n = \sum_{\nu=-k}^{n} a_\nu b^{-\nu} \quad (n \geq -k)$$

die Ungleichungen

$$(*) \quad s_n \leq x < s_n + b^{-n}$$

für alle $n \geq -k$ erfüllt. Wähle dazu $a_{-k} \in \{0, \ldots, b-1\}$ mit

$$a_{-k}b^k \leq x < (a_{-k}+1)b^k.$$

Sind $a_{-k}, \ldots, a_N \in \{0, \ldots, b-1\}$ gewählt so, dass die Ungleichungen $(*)$ für $n = -k, \ldots, N$ gelten, so gibt es genau ein $a_{N+1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ mit

$$s_N + a_{N+1}b^{-(N+1)} \leq x < s_N + (a_{N+1}+1)b^{-(N+1)}.$$

Für die so gewählte Zahl a_{N+1} gilt $(*)$ auch für $n = N+1$. Nach Konstruktion ist

$$|x - s_n| \leq b^{-n} \xrightarrow{n} 0.$$

Also ist $x = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$. $\square$

In der Darstellung $x = \pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ sind die Ziffern $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$ im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. So ist etwa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b-1)b^{-n} = \frac{b-1}{1-\frac{1}{b}} = b = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $a_{-1} = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n > -1$. Wir kommen in §8 auf dieses Problem zurück (siehe Lemma 8.12).

6 Unendliche Reihen

Wir erinnern an die Definition der Konvergenz unendlicher Reihen aus §4 und ergänzen die Definition um einen neuen Konvergenzbegriff.

Definition 6.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Man nennt die Zahlen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ($n \in \mathbb{N}$) die *Partialsummen* der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und definiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) Ist $c \in \mathbb{R}$, so schreibt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c$, falls

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \xrightarrow{n} c.$$

(c) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert (vergleiche Definition 4.16).

Eine Reihe in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummenfolge eine Cauchy-Folge bildet. Damit erhält man das folgende nützliche Kriterium für die Konvergenz von Reihen.

Satz 6.2 (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann und nur dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| < \epsilon$ für alle $q \geq p \geq n_0$.*

Beweis. Sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 5.2 ist die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|s_q - s_p| < \epsilon$ ist für alle $q, p \geq n_0$. Dann ist

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| = |s_q - s_{p-1}| < \epsilon$$

für alle $q \geq p \geq n_0 + 1$.

Sei umgekehrt das im Satz angegebene Kriterium erfüllt. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bilden. Sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| < \epsilon$ für alle $q \geq p \geq n_0$. Dann ist

$$|s_q - s_p| = \left|\sum_{k=\min(p,q)+1}^{\max(p,q)} a_k\right| < \epsilon$$

für alle $p, q \geq n_0$. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

Satz 6.3. *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach dem Cauchy-Kriterium aus Satz 6.2 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } q \geq p \geq n_0.$$

Dann ist $|a_n| = |\sum_{k=n}^{n} a_k| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. $\square$

Die Umkehrung von Satz 6.3 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.4 (*Harmonische Reihe*)**.** Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Zur Begründung beachte man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

gilt. Also ist das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.2 verletzt.

Satz 6.5. *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und für die Reihenwerte gilt*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \,.$$

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und sei $\epsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.2) angewendet auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=p}^{q} |a_k| < \epsilon$$

für alle $q \geq p \geq n_0$ gilt. Dann ist aber auch

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |a_k| < \epsilon$$

für alle $q \geq p \geq n_0$. Mit dem Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ erhält man die Konvergenz dieser Reihe. Zum Beweis der behaupteten Ungleichungen beachte man, dass für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ die Folge $(|x_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ wegen

$$||x_k| - |x|| \leq |x_k - x| \xrightarrow{k} 0$$

gegen $|x|$ konvergiert. Wegen

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad (k \in \mathbb{N})$$

erhält man daher mit Satz 4.10, dass

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

gilt. $\square$

Bemerkung 6.6. (a) Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. So wissen wir etwa nach Beispiel 6.4, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. In Satz 6.11 werden wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert.
(b) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Da diese Folge monoton wächst, folgt dies direkt aus Satz 5.9.

Satz 6.7 (Majorantenkriterium). *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ so, dass $k_0 \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+^*$ existieren mit $|b_k| \leq ca_k$ für alle $k \geq k_0$. Dann impliziert die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.2). Denn aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ folgt, dass man für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq k_0$ wählen kann so, dass

$$\sum_{k=p}^{q} |b_k| \leq c \sum_{k=p}^{q} a_k < \epsilon$$

für alle $q \geq p \geq n_0$ gilt. □

Man beachte, dass in der Situation von Satz 6.7 automatisch $a_k \geq 0$ für alle $k \geq k_0$ gilt und dass die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ natürlich auch ihre Konvergenz impliziert.

Beispiel 6.8. Für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Beweis. Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} = \frac{2}{2n^2} \leq \frac{2}{n^2+n} = 2\frac{1}{n(n+1)}.$$

Nach Beispiel 4.17(1) ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$. Also folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium (Satz 6.7). □

Satz 6.9 (Quotientenkriterium). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) Gibt es eine Konstante c mit $0 \leq c < 1$ und einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{k+1}| \leq c|a_k|$$

für alle $k \geq k_0$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(b) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$ und so, dass der Limes

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\geq N}} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in [0,1)$$

existiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. (a) Aus der Voraussetzung von Teil (a) folgt, dass für alle $k > k_0$ gilt

$$|a_k| \leq c|a_{k-1}| \leq c^2|a_{k-2}| \leq \ldots \leq c^{k-k_0}|a_{k_0}| = c^k(c^{-k_0}|a_{k_0}|).$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ nach Beispiel 4.17(2) konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium (Satz 6.7) die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(b) Sind die Voraussetzungen von Teil (b) erfüllt, so wähle man ein $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\geq N}} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1$$

und beachte, dass für die so gewählte Zahl q ein $k_0 \geq N$ existiert mit $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$ oder äquivalent $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ für alle $k \geq k_0$. Also folgt Teil (b) direkt aus Teil (a). $\square$

Bemerkung 6.10. (a) Aus $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ kann man nicht schließen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Dies zeigt etwa die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$. Offensichtlich ist

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{k}{k+1} < 1 \text{ für alle } k \geq 1,$$

aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert nach Beispiel 6.4.

(b) Mit dem Quotientenkriterium kann man die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ $(k \geq 2)$ nicht zeigen, denn

$$\frac{1}{(n+1)^k} \Big/ \frac{1}{n^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1^k = 1.$$

(c) Gibt es ein $R > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > R$ für alle $n \geq N$ (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ist), dann divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Denn in diesem Fall ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$|a_{N+n}| \geq R|a_{N+(n-1)}| \geq \ldots \geq R^n|a_N| \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$$

keine Nullfolge und nach Satz 6.3 ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

(d) (*Wurzelkriterium*) Existiert

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und ist $L < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Ist $L > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dies sieht man so. Ist $L < q < 1$, so ist $|a_n| < q^n$ für genügend große n und aus dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Im Falle $L > 1$ ist auch $|a_n| > 1$ für genügend große n und die Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt aus Satz 6.3.

Ein nützliches Kriterium, mit dem man manchmal die Konvergenz nicht absolut konvergenter Reihen zeigen kann, ist das sogenannte Leibniz-Kriterium.

Satz 6.11 (Leibnizkriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Wegen

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \le s_{2n},$$

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \ge s_{2n+1}$$

ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die Abschätzung

$$s_{2n} = s_{2n+1} + (s_{2n} - s_{2n+1}) = s_{2n+1} + a_{2n+1} \ge s_1$$

zeigt, dass $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt ist. Nach Satz 5.9 existiert der Limes

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt aber auch

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} s - 0 = s$$

und ein einfaches Argument zeigt, dass auch die ganze Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ gegen s konvergiert. $\square$

Beispiele 6.12. (a) Da $(\frac{1}{n})_{n\ge 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert nach dem Leibnizkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. Nach Beispiel 6.4 ist diese Reihe nicht absolut konvergent.

(b) Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium (Satz 6.9) ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bei endlichen Summen reeller Zahlen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Summanden an. Es ist daher naheliegend zu fragen, ob für jede konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ reeller Zahlen und jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konvergiert und denselben Reihenwert besitzt.

Beispiel 6.13. Es gibt eine nicht konvergente Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Um dies zu begründen, beachte man, dass wegen der Divergenz der harmonischen Reihe für jedes $N \in \mathbb{N}$ auch die Folge $\left(\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{2k}\right)_{n\ge N} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\ge N}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Daher kann man rekursiv eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ definieren mit $n_0 = 0$ und

$$\frac{1}{2(n_i+1)} + \frac{1}{2(n_i+2)} + \ldots + \frac{1}{2n_{i+1}} > 2$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann stellt aber die Reihe

$$\left(-1 + \frac{1}{2(n_0+1)} + \ldots + \frac{1}{2n_1}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2(n_1+1)} + \ldots + \frac{1}{2n_2}\right) + \ldots$$

eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ dar mit unbeschränkten Partialsummen.

Für absolut konvergente Reihen können solche Probleme nicht auftreten.

Satz 6.14. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut und für die Reihenwerte gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n(\varphi) = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \left|a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n(\varphi)} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

zeigt, dass die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergiert. Sei $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - s\right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Sei $N = \max\{\varphi^{-1}(0), \ldots, \varphi^{-1}(n_0)\}$. Dann folgt für alle $n \geq N$

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}\right) - s\right| = \left|\left(\sum_{k=0}^{n_0} a_k\right) - s + \sum_{\substack{k=0 \\ \varphi(k)>n_0}}^{n} a_k\right| \leq \left|\left(\sum_{k=0}^{n_0} a_k\right) - s\right| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon.$$

Also hat auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ den Wert s. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes beweisen wir noch eine nützliche Formel für das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen.

Satz 6.15. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut und für die Reihenwerte gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die Werte der beiden gegebenen Reihen und definieren $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$,

$$t_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach den Grenzwertsätzen (4.7) ist $AB = \lim_{n\to\infty} t_n$.

Um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und die behauptete Beziehung zwischen den Reihenwerten zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} (t_n - s_n) = 0$$

gilt. Um zu sehen, dass $(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, beachte man zunächst, dass

$$t_n = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{(j,k)\in I_n} a_j b_k$$

ist mit $I_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2;\ 0 \leq j \leq n \text{ und } 0 \leq k \leq n\}$ und dass

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) = \sum_{(j,k)\in J_n} a_j b_k$$

gilt mit $J_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2;\ j + k \leq n\}$. Also ist

$$t_n - s_n = \sum_{(j,k)\in \Delta_n} a_j b_k$$

mit $\Delta_n = \{(j,k) \in \{0,\ldots,n\}^2;\ j + k > n\}$. Da die durch

$$r_n = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right) \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\right)$$

definierte Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es zu jedem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|r_n - r_{n_0}| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Es ist

$$r_n - r_{n_0} = \sum_{(j,k)\in \Gamma_n} |a_j|\ |b_k|,$$

wobei die Indexmenge $\Gamma_n = \{(j,k) \in \{0,\ldots,n\}^2;\ j > n_0 \text{ oder } k > n_0\}$ für $n \geq 2n_0$ offensichtlich die weiter oben definierte Indexmenge Δ_n enthält. Für $n \geq 2n_0$ erhalten wir also

$$|t_n - s_n| \leq \sum_{(j,k)\in \Delta_n} |a_j|\ |b_k| \leq \sum_{(j,k)\in \Gamma_n} |a_j|\ |b_k| = |r_n - r_{n_0}| < \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $(t_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und hat den behaupteten Reihenwert.

Indem man den gerade bewiesenen Teil von Satz 6.15 anwendet auf die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, sieht man, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\ |b_{n-k}|\right)$$

konvergiert. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\ |b_{n-k}|,$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 6.7) absolut. $\square$

In der Situation von Satz 6.15 nennt man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Beispiel 6.16. In Beispiel 6.12(b) hatten wir gesehen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Nach dem Binomialtheorem (Satz 1.6) und dem gerade bewiesenen Satz über die Konvergenz von Cauchy-Produkten gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \, \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right).$$

Also erfüllt die durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definierte Funktion die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

7 Die Exponentialreihe

Die in Beispiel 6.16 eingeführte Funktion hat eine Reihe sehr schöner Eigenschaften.

Satz 7.1. *Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(Exponentialreihe)}$$

absolut. Sei $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *die dargestellte Funktion. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$*

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ (Funktionalgleichung),

(ii) $\exp(0) = 1$,

(iii) $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$,

(iv) $\exp(x) > 0$,

(v) $\exp(n) = \exp(1)^n$.

Beweis. Die absolute Konvergenz der Reihen und die Funktionalgleichung wurden in den Beispielen 6.12 und 6.16 begründet. Teil (ii) gilt offensichtlich und Teil (iii) folgt aus der Beobachtung, dass

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zum Beweis von (iv) beachte man, dass

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^0}{0!} = 1 > 0$$

für alle $x > 0$ ist und dass daher auch $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$ für alle $x < 0$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(n) = \exp(1 + \ldots + 1) = \exp(1)^n$ und $\exp(-n) = \exp(n)^{-1} = (\exp(1)^n)^{-1} = \exp(1)^{-n}$. $\square$

Definition 7.2. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt die *Exponentialfunktion.* Die Zahl

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

nennt man die *Eulersche Zahl.*

Man kann zeigen, dass e keine rationale Zahl ist. Zur *näherungsweisen Berechnung* von e schreiben wir

$$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + r_{N+1} \text{ mit } r_{n+1} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

und schätzen den Fehlerterm r_{n+1} ab

$$\begin{aligned}
r_{N+1} &= \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\ldots+\frac{1}{(N+2)\ldots(N+k)}+\ldots\right)\\
&\le \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\ldots\right)\\
&\le \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right)\\
&= \frac{1}{(N+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{(N+1)!}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\le e=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}+r_{N+1}\le\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}+\frac{2}{(N+1)!}$$

für alle $N\in\mathbb{N}$ gilt. Man kann dies zur näherungsweisen Berechnung von e benutzen (siehe [Forster I]):

$$e=2,718\ 281\ 828\ 459\pm 2\cdot 10^{-12}.$$

Diese Schreibweise soll bedeuten, dass der Betrag der Differenz zwischen der angegebenen Dezimalzahl und dem wirklichen Wert von e kleiner oder gleich $2\cdot 10^{-12}$ ist.

Satz 7.3. *(i) Für $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x<y$ ist $\exp(x)<\exp(y)$.*

(ii) Für jede reelle Zahl $R>0$ gibt es ein $\delta>0$ so, dass $\exp(x)>R$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x>\delta$ ist.

(iii) Für jede reelle Zahl $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ mit $0<\exp(x)<\epsilon$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x<-\delta$.

(iv) Für alle $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gelten die Ungleichungen

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x}-1\right|\le|x|\exp(|x|)\le e|x|.$$

Beweis. Für $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x<y$ gilt $\exp(y)=\exp(x)\exp(y-x)>\exp(x)$. Dabei haben wir benutzt, dass $\exp(x)>0$ und $\exp(y-x)>1$ gilt. Dies folgt aus Satz 7.1 bzw. aus dem Beweis dieses Satzes. Damit ist der Teil (i) gezeigt. Zum Beweis von (ii) sei eine reelle Zahl $R>0$ gegeben. Da $\exp(1)>1$ ist, gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\exp(1)^n>R$ (Satz 3.12). Dann gilt für alle $x>n$ die Abschätzung $\exp(x)>\exp(n)=\exp(1)^n>R$. Ist $\epsilon>0$, so gibt es nach dem gerade bewiesenen Beweisteil ein $\delta>0$ mit $\exp(x)>\frac{1}{\epsilon}$ für alle $x>\delta$. Für $x<-\delta$ ist dann $\exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)}<\frac{1}{(1/\epsilon)}=\epsilon$. Bleibt noch der Teil (iv) zu beweisen. Für alle $x\in\mathbb{R}$ folgt mit Satz 6.5, dass

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x}-1\right|=\left|\frac{\exp(x)-1-x}{x}\right|=|x|\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}\right|\le|x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{(n+2)!}\le|x|\exp(|x|).$$

Zusammen mit der in Teil (i) bewiesenen Montonie der Exponentialfunktion folgt die Behauptung. □

8 Punktmengen

Für die Menge $M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ ist $1 = \max(M)$, denn $1 \in M$ und $\frac{1}{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Die Menge M besitzt aber kein Minimum, denn zu jeder Zahl $x = \frac{1}{n} \in M$ existiert ein $y \in M$ mit $y < x$, etwa $y = \frac{1}{n+1}$.

Definition 8.1. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und seien $s, t \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

(a) Die Menge M heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a$ (bzw. mit $x \geq a$) für alle $x \in M$. Jede solche Zahl a heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* von M.

(b) Man nennt die Menge M *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

(c) Die Zahl t heißt *Supremum* (oder *kleinste obere Schranke*) von M (geschrieben $t = \sup M$), falls

  (i) $x \leq t$ für alle $x \in M$ ist und

  (ii) für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $x \leq a$ für alle $x \in M$ gilt, dass $t \leq a$ ist.

  Man nennt s *Infimum* (oder *größte untere Schranke*) von M, falls

  (i) $x \geq s$ für alle $x \in M$ ist und

  (ii) für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a$ für alle $x \in M$ gilt, dass $s \geq a$ ist.

Aus den beiden definierenden Bedingungen folgt sofort, dass das Supremum und Infimum einer Menge, wenn sie existieren, eindeutig bestimmt sind. Es gibt eine sehr einfache Beziehung zwischen Suprema und Maxima sowie Infima und Minima von Mengen.

Bemerkung 8.2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ und seien $s, t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(i) $t = \max(M)$ genau dann, wenn $t = \sup M$ ist und $t \in M$ gehört.
(ii) $s = \min(M)$ genau dann, wenn $s = \inf M$ ist und $s \in M$ gehört.

Beweis. Sei $t = \max(M)$. Nach Definition ist $t \in M$ und $t \geq x$ für alle $x \in M$. Ist $a \in \mathbb{R}$ irgendeine obere Schranke von M, so ist $a \geq t$, da $t \in M$. Also ist $t = \sup M$. Ist umgekehrt $t = \sup M$ und $t \in M$, so gilt $t \geq x$ für alle $x \in M$ und daher ist $t = \max(M)$. Teil (ii) beweist man entsprechend. $\square$

Für $M \subset \mathbb{R}$ definieren wir $-M = \{-x;\ x \in M\}$.

Lemma 8.3. *Seien $M \subset \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $t = \sup(M)$ genau dann, wenn $-t = \inf(-M)$ ist.*

Beweis. Sei $t = \sup M$. Dann ist $t \geq x$ für alle $x \in M$ und daher $-t \leq -x$ für alle $x \in M$. Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leq -x$ für alle $x \in M$, so ist $-a \geq x$ für alle $x \in M$. Nach Definition des Supremums ist $-a \geq t$, also $a \leq -t$. Damit ist gezeigt, dass $-t = \inf(-M)$ ist. Die umgekehrte Implikation folgt völlig analog. $\square$

Beschränkte Mengen brauchen weder ein Maximum noch ein Minimum zu besitzen. Mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips, und damit letztlich der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, zeigen wir, dass sich Suprema und Infima wesentlich besser verhalten in dieser Hinsicht.

Satz 8.4. *(a) Jede nach oben beschränkte Menge $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum.*

(b) Jede nach unten beschränkte Menge $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infinimum.

Beweis. Wegen Lemma 8.3 genügt es, den Teil (a) zu beweisen.
Sei also $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Wir fixieren einen Punkt $a_0 \in M$ sowie eine obere Schranke b_0 von M und setzen $I_0 = [a_0, b_0]$. Rekursiv kann man abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ wählen so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $I_{k+1} \subset I_k$,

(ii) Länge $(I_k) = (\frac{1}{2})^k$ Länge (I_0),

(iii) b_k ist obere Schranke von M und $M \cap I_k \neq \varnothing$.

Seien dazu $I_0, \ldots, I_k$ gewählt mit diesen Eigenschaften. Ist $\frac{a_k+b_k}{2}$ obere Schranke von M, so setze man $a_{k+1} = a_k$ und $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$. Ist $\frac{a_k+b_k}{2}$ keine obere Schranke von M, so wähle man $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ und $b_{k+1} = b_k$. Sei $I_{k+1} = [a_{k+1},\ b_{k+1}]$. In jedem Fall ist Länge $(I_{k+1}) = \frac{1}{2}$ Länge $(I_k) = (\frac{1}{2})^{k+1}$ Länge (I_0), die Zahl b_{k+1} ist obere Schranke von M und $I_{k+1} \cap M \neq \varnothing$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzig (Satz 5.5) gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{t\}$ und

$$\lim_{k\to\infty} a_k = t = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Ist $x \in M$, so ist $x \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit nach Satz 4.10 auch $x \leq t$. Sei $a \in \mathbb{R}$ irgendeine obere Schranke von M. Nach Konstruktion gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $a_k \leq x_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Vergleichskriterium (Satz 4.9) und Satz 4.10 ist $t = \lim_{k\to\infty} x_k \leq a$. Damit haben wir gezeigt, dass $t = \sup M$ gilt. □

Beispiele 8.5. (a) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Zur Begründung beachte man, dass nach Satz 8.4 das Supremum $t = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ existiert und dass nach Definition des Supremums zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_{n_0} > t - \epsilon$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, ist dann $t - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq t$ und insbesondere auch $|x_n - t| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(b) Ist (x_n) eine monoton fallende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so gilt entsprechend $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Direkt oder als Anwendung von Teil (b) folgt, dass $\inf\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\} = 0$ ist.

(d) Offensichtlich ist $\inf[a,b] = \inf]a,b[= a,\ \sup[a,b] = \sup]a,b[= b$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 8.6. Sei $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ eine Menge und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Ist M nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt, so setzt man

$$\sup M = \infty \text{ (bzw. } \inf M = -\infty).$$

(b) Man nennt

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k;\ k \geq n\}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

den *Limes superior* und

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k;\ k \geq n\}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

den *Limes inferior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hierbei gelte für die konstanten Folgen $c_n = \infty$ $(n \in \mathbb{N})$, $d_n = -\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ definitonsgemäß

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty.$$

Als vereinfachende Konvention vereinbart man, dass $x < \infty$ und $x > -\infty$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.7. Zur Wohldefiniertheit von Limes superior und Limes inferior überlege man sich:
(a) Für zwei Mengen $\varnothing \neq A \subset B$ gilt $\sup A \leq \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$.
(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\sup\{a_k;\ k \geq n\} = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist $(\sup\{a_k;\ k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert eigentlich gegen ein $s \in \mathbb{R}$ oder uneigentlich gegen $-\infty$. Es ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ gilt.
(c) Zu (b) entsprechende Aussagen gelten für den Limes inferior.

Satz 8.8. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \max\{c \in \mathbb{R};\ c$ *ist Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$,

(b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min\{c \in \mathbb{R};\ c$ *ist Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Beweis. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Aus Bemerkung 8.7(b) folgt, dass $s = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ist. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq s + \epsilon$. Denn sonst wäre nach Satz 4.10 $s = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\} \geq s + \epsilon$. Also liegt jeder Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(-\infty, s]$. Anderseits gibt es zu jedem gegebenen $\epsilon > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > s - \epsilon$. Denn sonst gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \leq s - \epsilon$ für alle $k \geq n_0$. Folglich wäre $\sup\{a_k;\ k \geq n_0\} \leq s - \epsilon$ und nach Beispiel 8.5(b) würde folgen, dass $s \leq \sup\{a_k;\ k \geq n_0\} \leq s - \epsilon$ wäre. Da es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt $a_n > s - \epsilon$ und nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq s + \epsilon$, ist $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in]s - \epsilon, s + \epsilon[\}$

unendlich für alle $\epsilon > 0$. Also ist s ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der größer oder gleich jedem anderen Häufungspunkt dieser Folge ist.
(b) Entsprechend zeigt man, dass $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. $\square$

Korollar 8.9. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist (eigentlich oder uneigentlich) konvergent genau dann, wenn $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ist. In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.*

Beweis. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 5.8 dann und nur dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt besitzt, und nach Satz 8.8 ist dies äquivalent zu $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Offensichtlich stimmen in diesem Fall Limes superior und Limes inferior mit dem Limes überein. Bleibt noch der Fall zu betrachten, dass $(a_n)_{n\in\infty}$ unbeschränkt ist. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (uneigentlich!) genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ist. Dies impliziert, dass $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$ ist. Stimmen umgekehrt Limes superior und Limes inferior überein, so ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt, so sieht man entsprechend, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich!) genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ist bzw. genau dann, wenn $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt. $\square$

Im Folgenden wollen wir uns überlegen, wie man die Größe (in der Mathematik spricht man von *Mächtigkeit*) unendlicher Mengen vergleichen kann.

Definition 8.10. Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ gibt. Offensichtlich ist eine Menge M genau dann abzählbar, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Menge M gibt derart, dass gilt $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} = M$.

Beispiel 8.11. (a) Jede endliche Menge $\{a_0, \dots, a_N\}$ ist abzählbar. Denn $\{a_0, \dots, a_N\}$ ist die Menge der Folgenglieder der durch $x_n = a_n$ für $n = 0, \dots, N,\ x_n = a_N$ für $n > N$ definierten Folge.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist abzählbar als Bildmenge der Folge $x_n = n \quad (n \in \mathbb{N})$.

(c) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar als Bildmenge der durch $x_{2n} = n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_{2n-1} = -n$ für $n \in \mathbb{N}^*$ definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Die Menge $\mathbb{N}^2 = \{(i,j);\ i,j \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Bildmenge $\mathbb{N}^2$ erhält man, indem man nacheinander für $k = 0, 1, 2, \dots$ die Mengen $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2;\ i + j = k\}$ abzählt:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), \dots).$$

(e) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen M_n $(n \in \mathbb{N})$ ist abzählbar. Zum Beweis schreibe man M_n in der Form

$$M_n = \{x_{nm};\ m \in \mathbb{N}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und beachte, dass die durch

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n,\ (i,j) \mapsto x_{ij}$$

definierte Abbildung surjektiv ist. Da $\mathbb{N}^2$ nach Teil (d) abzählbar ist, gibt es eine surjektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. Als Komposition surjektiver Abbildungen ist auch $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ surjektiv.

(f) Auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Dies folgt mit Teil (e), denn

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \{-n,\dots,n\} \text{ und } q \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

ist eine Darstellung von $\mathbb{Q}$ als Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen.

Bevor wir zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, kommen wir noch einmal auf das Eindeutigkeitsproblem für die Darstellung reeller Zahlen als b-adische Brüche zurück (vgl. Satz 5.12). Wir betrachten nur den Fall $b = 10$.

Lemma 8.12. *Seien $(a_k)_{k\geq 1},\ (b_k)_{k\geq 1}$ Folgen in $\{0,\dots,9\}$ mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ 10^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ 10^{-k}.$$

Dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k \geq 1$ oder es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k, b_k \in \{0,9\}$ für alle $k \geq k_0$.

Beweis. Sei $a_k \neq b_k$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$. Definiere

$$N = \min\{k \in \mathbb{N}^*;\ a_k \neq b_k\}$$

als die kleinste Zahl mit $a_N \neq b_N$. Da alle Ziffern mit kleineren Indizes übereinstimmen, sind

$$x = \sum_{k=N}^{\infty} a_k\ 10^{-k} = \sum_{k=N}^{\infty} b_k\ 10^{-k}$$

zwei Darstellungen derselben reellen Zahl x. Ist $a_N < b_N$, so folgt aus

$$\begin{aligned} x &\leq a_N\ 10^{-N} + \sum_{k=N+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = a_N\ 10^{-N} + 9\left(\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k}\right) 10^{-N} \\ &= (a_N+1)10^{-N} \leq b_N\ 10^{-N} \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k\ 10^{-k} = x, \end{aligned}$$

dass $b_N = a_N + 1,\ a_k = 9$ und $b_k = 0$ für alle $k > N$ gilt.
Ist $a_N > b_N$, so folgt genauso, dass $a_N = b_N + 1,\ b_k = 9$ und $a_k = 0$ für alle $k > N$ gilt. □

Genauso wie im obigen Beweis zeigt man, dass sich zwei Ziffernfolgen $(a_n)_{n\geq -k},\ (b_n)_{n\geq -k}$ in $\{0,\dots,b-1\}$ derart, dass die b-adischen Brüche mit diesen Ziffernfolgen dieselbe reelle Zahl darstellen, in der ersten voneinander verschiedenen Ziffer höchstens um 1 unterscheiden können und dass von dieser Stelle an in der Ziffernfolge, in der an dieser Stelle die kleinere Ziffer steht, nur noch die Ziffer $b-1$ und in der anderen Ziffernfolge nur noch die Ziffer 0 vorkommen kann.

Satz 8.13. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, $\mathbb{R}$ sei abzählbar. Eine einfache Überlegung zeigt, dass jede Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist. Also gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ mit $\{x_n;\ n \geq 1\} =]0,1[$. Die Dezimalbruchentwicklung der Zahlen x_n (siehe Satz 5.12) hat die Form

$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots\ .$$

Da die reelle Zahl $c = 0, c_1\ c_2\ c_3\dots$ mit den Ziffern

$$c_k = 1,\ \text{falls}\ a_{kk} \neq 1,\ c_k = 2,\ \text{falls}\ a_{kk} = 1,$$

in $]0,1[$ liegt, müsste es ein $n \in \mathbb{N}^*$ geben mit $c = x_n$. Da in der Dezimalbruchentwicklung von c weder die Zahl 0 noch die Zahl 9 vorkommt, müssten nach Satz 8.12 alle Ziffern in der Entwicklung von c und von x_n übereinstimmen. Dies ist nicht möglich, da c so definiert wurde, dass $c_n \neq a_{nn}$ ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. $\square$

Korollar 8.14. *(a) Kein Intervall $]a,b[\subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist abzählbar.*

(b) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar.

Beweis. (a) Da für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Abbildung $\varphi :]0,1[\to]a,b[,\ \varphi(t) = a + t(b-a)$ bijektiv ist und da $]0,1[$ nach dem letzten Beweis nicht abzählbar ist, kann auch das Intervall $]a,b[$ nicht abzählbar sein.

(b) Nach Beispiel 8.11(f) ist $\mathbb{Q}$ abzählbar und nach 8.11(e) ist insbesondere die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen abzählbar. Die Annahme, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar ist, würde zu dem Widerspruch führen, dass auch $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ abzählbar wäre. $\square$

9 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir erinnern noch einmal an einige wichtige Begriffe und Schreibweisen für reellwertige Funktionen.

Definition 9.1. Sei D eine beliebige nicht leere Menge. Eine (*reellwertige*) *Funktion* auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$. Man nennt

(a) D den *Definitionsbereich* von f,

(b) $f(D) = \{f(x);\ x \in D\}$ das *Bild* von f (man schreibt auch Im f oder ran f statt $f(D)$),

(c) $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in D\} \subset D \times \mathbb{R}$ den *Graphen* von f.

Für eine Menge $B \subset \mathbb{R}$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in D;\ f(x) \in B\}$ das *Urbild* von B unter f.

Beispiele 9.2. (a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Man nennt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c$ die konstante Funktion mit Wert c (geschrieben: $f \equiv c$).

(b) Die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ heißt die *identische Funktion* auf $\mathbb{R}$.

(c) Die *Betragsfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$.

(d) Eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

mit fest vorgegebenen reellen Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißt *Polynomfunktion* auf $\mathbb{R}$.

(e) Seien p, q Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit $q \not\equiv 0$ und sei $D = \{x \in \mathbb{R};\ q(x) \neq 0\}$. Dann heißt

$$r : D \to \mathbb{R},\ r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine *rationale Funktion* (auf D).

(f) Die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ heißt *Wurzelfunktion* (siehe *Satz 5.5*).

(g) In §7 haben wir die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definiert.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ist $\varnothing \neq D_0 \subset D$ eine nicht leere Teilmenge, so nennt man die Funktion $D_0 \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ die *Einschränkung* von f auf D_0 (geschrieben: $f|_{D_0}$).

Definition 9.3. (a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definiert man Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R},\ \alpha f : D \to \mathbb{R},\ fg : D \to \mathbb{R}$$

durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Für $D' = \{x \in D;\ g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ definieren wir $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ durch $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(b) Sei D eine beliebige Menge und sei $E \subset \mathbb{R}$. Sind $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$, so heißt die durch

$$g \circ f : D \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

definierte Funktion die *Komposition* von f und g.

Bemerkung 9.4. Alle rationalen Funktionen lassen sich gewinnen, indem man die Operationen aus Definition 9.3(a) endlich oft auf die konstante Funktion $f \equiv 1$ und auf die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ anwendet.

Beispiel 9.5. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt

$$|\exp(x) - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \exp(|x|) \leq e|x|.$$

Folglich erhält man für $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \leq 1$

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = \exp(x_0)|\exp(x - x_0) - 1| \leq \exp(x_0 + 1)|x - x_0|.$$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $(x_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x$, so gibt es daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|\exp(x_n) - \exp(x)| \leq \exp(x+1)|x_n - x|$$

für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich der Exponentialfunktion mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ die Bildfolge $(\exp(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\exp(x)$.

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Man nennt a *approximierbar* in D, falls mindestens eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D existiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definition 9.6. Seien $D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ approximierbar in D. Für $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Man schreibt $\lim_{x\downarrow a} f(x) = c$, falls $\lim_{x\to a} f|_{D\cap(a,\infty)}(x) = c$ gilt, und entsprechend

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow a} f(x) &= c, \text{ falls } \lim_{x\to a} f|_{D\cap(-\infty,a)}(x) = c \text{ ist,} \\ \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) &= c, \text{ falls } \lim_{x\to a} f|_{D\cap(\mathbb{R}\setminus\{a\})}(x) = c \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ausführlich bedeutet die Schreibweise $\lim_{x\downarrow a} f(x) = c$ also, dass mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ existiert und dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist für jede solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D. Entsprechendes gilt für die anderen Fälle.

Beispiel 9.7. (a) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$. Dies folgt direkt aus Beispiel 9.5. Nach Satz 7.3(ii) und (iii) gilt

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

(b) Für $a \in \mathbb{R}_+$ gilt $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Zum Beweis sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $a > 0$ ist. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \frac{a}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Aus der strengen Monotonie der Quadratfunktion (Folgerung 3.5) folgt, dass auch $\sqrt{a_n} > \sqrt{\frac{a}{2}}$ ist für $n \geq n_0$. Wegen

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}} \xrightarrow{n} 0$$

ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Sei $a = 0$. Würde $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergieren, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $\sqrt{a_n} \geq \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre aber auch $a_n \geq \epsilon^2$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x]$ (vgl. Satz 3.15). Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\downarrow n} f(x) = n = f(n),\ \lim_{x\uparrow n} f(x) = n - 1.$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to n} f(x)$ existiert nicht.

(d) Sei $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ eine Polynomfunktion mit $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ und

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty \text{ für } n \text{ gerade, } \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Zum Beweis der ersten Behauptung definieren wir

$$c = 2n \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|, 1\}.$$

Für $x \geq c$ gilt dann

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \geq 1 - \frac{|a_1|}{x} - \frac{|a_2|}{x^2} - \ldots - \frac{|a_n|}{x^n} \geq 1 - \frac{1}{x}\left(|a_1| + \ldots + |a_n|\right) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

und daher

$$p(x) = x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) \geq \frac{1}{2}x^n \geq \frac{1}{2}x \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \infty.$$

Die Behauptungen für $x \to -\infty$ folgen aus dem gerade bewiesenen Teil, indem man die Polynomfunktion $p(x)$ schreibt als $p(x) = (-1)^n\, q(-x)$ mit

$$q(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^n a_n.$$

Satz 9.8. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ approximierbar in D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Grenzwerte*

$$c = \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R},\ d = \lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$$

existieren. Dann gilt:

(a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = c + d,\ \lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \alpha c$,

(b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = cd$,

(c) im Falle $d \neq 0$ gilt $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{c}{d}$.

Beweis. Alle Behauptungen folgen direkt aus der Definition der Konvergenz von Funktionen (Definition 9.6) und den Grenzwertsätzen für Folgen (Satz 4.7). Sei etwa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = d$. Im Falle $d \neq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(x_n) \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist a auch approximierbar in $D' = \{x \in D;\ g(x) \neq 0\}$ unter dieser Voraussetzung. Mit den Grenzwertsätzen (Satz 4.7) folgt,dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = c\cdot d,\\
\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = c+d,\\
\lim_{n\to\infty}(\alpha f)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(\alpha f(x_n)) = \alpha c,\\
\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_0}}\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_0}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{c}{d},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Aussage für $d \neq 0$ und jedes n_0 wie oben beschrieben gilt. □

Satz 9.9 (Kettenregel für Grenzwerte)**.** *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $h : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sind $a, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ so, dass*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \text{ und } \lim_{x\to c} h(x) = d$$

gilt, so ist $\lim_{x\to a}(h\circ f)(x) = d$.

Beweis. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Aus der Voraussetzung für h folgt, dass $\lim_{n\to\infty}(h\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(f(x_n)) = d$ ist. □

Definition 9.10 (*Stetigkeit*)**.** Seien $D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f ist definitionsgemäß *stetig in* a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

gilt. Man nennt f *stetig auf* D, wenn f stetig in jedem Punkt aus D ist.

Beispiele 9.11. (a) Die konstanten Funktionen $f \equiv c$ $(c \in \mathbb{R})$ und die identische Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) Aus Beispiel 9.7(a) folgt, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Nach Beispiel 9.7(b) ist die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}_+$.

Aus den oben bewiesenen Sätzen über das Grenzwertverhalten zusammengesetzter Funktionen erhält man Erhaltungssätze für die Stetigkeit.

Satz 9.12. *Seien $D, E \subset \mathbb{R}, f, g : D \to \mathbb{R},\ h : E \to \mathbb{R}$ Funktionen und seien $a \in D, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Sind f, g stetig in a, so sind auch $f + g,\ \alpha f$ und fg stetig in a.

(b) Sind f, g stetig in a und ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.

(c) Ist $f(D) \subset E$ und sind f stetig in a, h stetig in $f(a)$, so ist $h \circ f$ stetig in a.

Beweis. Die Teile (a) und (b) folgen direkt aus Satz 9.8 mit $c = f(a)$ und $d = g(a)$. Teil (c) folgt aus Satz 9.9 mit $c = f(a)$ und $d = h(f(a))$. ☐

Beispiele 9.13. (a) Nach Beispiel 9.11(a) und Satz 9.12(a) sind alle Polynomfunktionen stetig auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

(b) Nach Teil (a) und Satz 9.12(b) sind alle rationalen Funktionen stetig auf ihrem ganzen Definitionsbereich.

(c) Die Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist stetig. Dies folgt entweder direkt als Anwendung der Dreiecksungleichung

$$||x| - |a|| \leq |x - a| \quad (x, a \in \mathbb{R})$$

oder indem man Satz 9.12(c) anwendet auf die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ (mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$) und $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{x}$. Nach Satz 9.12 ist die Komposition $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$ stetig.

(d) Nach Satz 9.12(d) sind mit jeder Polynomfunktion p auch die Funktionen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(p(x)) \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto p(\exp(x))$$

stetig.

10 Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir haben gesehen (Satz 5.4), dass die Gleichung $x^2 = c$ für jede positive reelle Zahl $c > 0$ eine eindeutige Lösung x in $\mathbb{R}_+^*$ hat. Bleibt dieses Resultat richtig, wenn man den Exponenten 2 durch eine beliebige ganze Zahl $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ersetzt? Wegen der strengen Monotonie der Funktion (siehe Folgerung 3.5 und Satz 3.6(b))

$$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^p$$

hat die Gleichung $x^p = c$ für $c > 0$ höchstens eine Lösung in $\mathbb{R}_+^*$. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 7.1) folgt, dass die Gleichung für reelle Zahlen der Form $c = \exp(x), \ x \in \mathbb{R}$, immer eine Lösung in $\mathbb{R}_+^*$ besitzt:

$$\exp\left(\frac{x}{p}\right)^p = \exp\left(p\frac{x}{p}\right) = \exp(x).$$

Um zu zeigen, dass die Gleichung für jedes vorgegebene $c \in \mathbb{R}_+^*$ eine Lösung in $\mathbb{R}_+^*$ besitzt, würde es also genügen zu zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ ist. Da die Exponentialfunktion stetig ist und nach Beispiel 9.7(a)

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$$

gilt, genügt es daher den folgenden allgemeinen Satz über stetige Funktionen zu beweisen.

Satz 10.1 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit*

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq c \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Dann gibt es eine Zahl $t \in [a, b]$ mit $f(t) = c$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass

$$\min\{f(a), f(b)\} < c < \max\{f(a), f(b)\}$$

gilt, denn sonst ist $c = f(a)$ oder $c = f(b)$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $f(a) < f(b)$ ist. Da die Menge

$$M = \{x \in [a, b]; \ f(x) \leq c\}$$

nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert das Supremum $t = \sup M$ (Satz 8.4). Offensichtlich ist $t \in [a, b]$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in M$ mit $t - \frac{1}{n} < x_n$. Da auch $x_n \leq t$ ist für alle $n \geq 1$, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = t$. Aus der Stetigkeit von f in t folgt, dass $f(t) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ ist. Wegen $f(x_n) \leq c$ für alle n ist auch $f(t) \leq c$. Insbesondere ist $t < b$. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]t, b]$ mit $\lim_{n \to \infty} y_n = t$. Dann ist $f(t) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) \geq c$, da f stetig ist in t und $y_n \notin M$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $f(t) = c$ ist.

Ist $f(a) > f(b)$, so folgt die Existenz der gesuchten Stelle $t \in [a, b]$, indem man den gerade bewiesenen Teil anwendet auf die stetige Funktion $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und auf $-c$ statt c. $\square$

Im Beweis des Zwischenwertsatzes haben wir die Existenz von Suprema für nach oben beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{R}$ und damit die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ benutzt.

Korollar 10.2. *Sei $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann hat die Gleichung*

$$x^p = c$$

für jede positive reelle Zahl $c \in \mathbb{R}_+^*$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}_+^*$.

Beweis. Zu $c \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es nach Satz 7.3(ii) und (iii) reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\exp(a) < c < \exp(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 10.1) angewendet auf die stetige Funktion $\exp : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $t \in [a, b]$ mit $\exp(t) = c$. Dann ist $x = \exp(\frac{t}{p})$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x^p = c$ in $\mathbb{R}_+^*$. □

Definition 10.3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (*nach oben*, *nach unten*) *beschränkt* genau dann, wenn die Menge $f(D) \subset \mathbb{R}$ (nach oben, nach unten) beschränkt ist.

Satz 10.4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

(a) f ist beschränkt,

(b) es gibt $s, t \in [a, b]$ mit $f(s) = \min f([a, b])$ und $f(t) = \max f([a, b])$,

(c) $f([a, b]) = [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$.

Beweis. (a) und (b). Sei $A = \sup f([a, b])$. Dann ist $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.7) und Satz 4.13 besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert t dieser Teilfolge liegt nach Satz 4.10 im Intervall $[a, b]$. Da f stetig in t ist, folgt

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Also ist $A \in \mathbb{R}$ und $\sup f([a, b]) = f(t) = \max f([a, b])$.
Die Beschränktheit von f nach unten und die Existenz einer Zahl $s \in [a, b]$ mit $f(s) = \min f([a, b])$ kann man ähnlich zeigen. Alternativ kann man auch den gerade bewiesenen Teil der Behauptung auf die stetige Funktion $-f : [a, b] \to \mathbb{R}$ anwenden.
(c). Offensichtlich gilt $f([a, b]) \subset [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion wähle man s, t wie in (b) und wende den Zwischenwertsatz (10.1) an auf die stetige Funktion $f|_{[\min(s,t), \max(s,t)]}$. □

Die Abgeschlossenheit des Intervalls $[a, b]$ ist eine wesentliche Voraussetzung in Satz 10.4. So ist etwa die Funktion

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

stetig, aber wegen $f(]0, 1]) = [1, \infty)$ nicht beschränkt.

Satz 10.5 (ϵ-δ-Kriterium)**.** *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.*

(a) Ist a approximierbar in D, so ist $\lim_{x\to a} f(x) = c$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $|f(x) - c| < \epsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

(b) Ist $a \in D$, so ist f stetig in a genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Beweis. Offensichtlich folgt Teil (b) direkt aus Teil (a). Sei also a approximierbar in D. Wir setzen zunächst voraus, dass $\lim_{x\to a} f(x) = c$ ist. Sei $\epsilon > 0$. Würde es dazu kein $\delta > 0$ wie im Satz beschrieben geben, so gäbe es für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - c| \geq \epsilon$. Dann wäre aber $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ und nach Definition der Konvergenz von Funktionen würde folgen, dass $c = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ ist oder äquivalent $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - c) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den in Teil (a) beschriebenen Eigenschaften gibt.
Sei umgekehrt die in Teil (a) beschriebene ϵ-δ-Bedingung erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist. Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit $f(D\cap]a - \delta,\ a + \delta[) \subset]c - \epsilon,\ c + \epsilon[$. Zu diesem $\delta > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt aber $|f(x_n) - c| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c. □

Bemerkung 10.6. (a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in D$ approximierbar in $D \setminus \{a\}$. Aus Teil (a) von Satz 10.5 folgt, dass f stetig in a ist genau dann, wenn $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$ ist.
(b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Gibt es ein $r > 0$ so, dass $f = g$ auf $D\cap]a - r, a + r[$ gilt, so ist die Stetigkeit von f im Punkt a äquivalent zur Stetigkeit von g in a. Dies folgt aus der Definition der Stetigkeit (Definition 9.10) oder genauso einfach aus dem ϵ-δ-Kriterium.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf $D \subset \mathbb{R}$ und ist $a \in D$, so hängt das zu $\epsilon > 0$ gemäß Satz 10.5(b) gewählte $\delta > 0$ nicht nur von ϵ, sondern auch von a ab. Als nächstes betrachten wir Funktionen, für die man δ unabhängig von der jeweiligen Stelle $a \in D$ wählen kann.

Definition 10.7. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

Satz 10.8. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass zu jedem $\delta > 0$ Elemente $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ existieren. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ Elemente $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.7) und Satz 4.13 hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Nach Satz 4.10 ist $x \in [a, b]$. Wegen

$$|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{n} \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

konvergiert auch die Folge $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. Da f stetig ist in x, erhalten wir, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_{k_n})$ ist. Dies ist nicht möglich, da wir die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gewählt haben, dass $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \epsilon$ ist für alle n. Also ist unsere Annahme, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, falsch. $\square$

Im Allgemeinen brauchen stetige Funktionen nicht gleichmäßig stetig zu sein. So ist etwa die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Wäre f gleichmäßig stetig, so müsste es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ geben mit $|f(x) - f(y)| < 1$ für alle $x, y \in]0,1]$ mit $|x - y| < \delta$. Für dieses δ würde es aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Dies ist nicht möglich, da sonst $n = |f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{n})| < 1$ sein müsste für alle $n \geq n_0$.

11 Logarithmus und allgemeine Potenzen

Bevor wir uns mit den Eigenschaften von Umkehrfunktionen und insbesondere mit der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ beschäftigen, erinnern wir an den Begriff der *strengen Monotonie.*

Definition 11.1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt

(i) (*streng*) *monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$ im streng monoton wachsenden Fall),

(ii) (*streng*) *monoton fallend*, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$ im streng monoton fallenden Fall),

(iii) (*streng*) *monoton*, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Streng monotone Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ sind immer injektiv. Für stetige Funktionen auf abgeschlossenen, endlichen Intervallen gilt auch die Umkehrung.

Satz 11.2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton genau dann, wenn sie injektiv ist.*

Beweis. Zum Beweis der nicht trivialen Richtung setzen wir voraus, dass f injektiv ist. Wir wollen zeigen, dass f streng monoton ist. Es genügt, den Fall $f(a) < f(b)$ zu betrachten. Denn mit f ist auch $-f$ injektiv bzw. streng monoton. Sei also $f(a) < f(b)$. Wir nehmen an, dass f nicht streng monoton ist. Dann gibt es $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $f(x) \geq f(y)$. Wegen der vorausgesetzten Injektivität von f ist $f(x) > f(y)$. Wäre $f(y) < f(a)$, so gäbe es wegen $f(y) < f(a) < f(b)$ nach dem Zwischenwertsatz (Satz 10.1) ein $t \in]y, b[$ mit $f(t) = f(a)$ im Widerspruch zur Injektivität von f. Also ist $f(a) \leq f(y) < f(x)$ und mit dem Zwischenwertsatz würde folgen, dass ein $t \in [a, x]$ existiert mit $f(t) = f(y)$. Wegen $x < y$ widerspricht auch dies der Injektivität von f. Also war die Annahme, dass f nicht streng monoton ist, falsch. □

Nach Satz 7.3 ist die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

streng monoton wachsend und damit injektiv. Im Beweis von Korollar 10.2 haben wir mit dem Zwischenwertsatz gezeigt, dass $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ ist. Als bijektive Funktion hat $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ eine Umkehrfunktion

$$\exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ \exp^{-1}(y) = x,\ \text{falls } x \in \mathbb{R} \text{ ist mit } \exp(x) = y.$$

Wir schreiben

$$\log = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

für die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $p \in \mathbb{Z}$ gilt (siehe Satz 7.1)

$$a^p = \exp(\log a)^p = \exp(p \log a).$$

Da die rechte Seite für beliebige reelle Zahlen p Sinn macht, kann man umgekehrt versuchen, Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten durch die obige Formel zu definieren.

Definition 11.3. (a) Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\log = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

heißt der (*natürliche*) *Logarithmus*.

(b) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$a^x = \exp(x \log a).$$

(c) Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{N}^*$ setzt man (vergleiche Korollar 10.2)

$$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}} = \exp\left(\frac{1}{q}\log a\right).$$

Wir hatten die Eulersche Zahl e definiert durch $e = \exp(1)$. Mit Teil (a) und Teil (b) der obigen Definition folgt daher, dass

$$e^x = \exp(x \log e) = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 11.4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann gilt mit $A = f(a)$, $B = f(b)$:*

(a) f bildet $[a,b]$ bijektiv auf $[A,B]$ (bzw. auf $[B,A]$) ab.

(b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ (bzw. $f^{-1} : [B,A] \to [a,b]$) ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. Der Teil (a) folgt direkt aus der strengen Monotonie und dem Zwischenwertsatz (Satz 10.1) (siehe auch Korollar 10.4).

Da $f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y)$ für alle $y \in f([a,b])$ gilt, genügt es, Teil (b) zu beweisen für den Fall, dass f streng monoton wächst. Mit f ist auch f^{-1} streng monoton wachsend. Denn sind $y_1, y_2 \in [A,B]$ mit $y_1 < y_2$, so würde aus der Annahme, dass $(f^{-1})(y_1) \geq (f^{-1})(y_2)$ ist, der Widerspruch $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$ folgen. Bleibt noch die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[A,B]$, die gegen ein $y \in [A,B]$ konvergiert. Seien $x_n, x \in [a,b]$ die eindeutigen Zahlen mit $f(x_n) = y_n$ und $f(x) = y$. Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist. Wir nehmen an, dass dies falsch ist.

Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.7) und mit Satz 5.8 folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt

$x' \neq x$ besitzt. Nach Satz 4.13 hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes x'. Da f stetig in x' ist, erhalten wir

$$f(x') = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = y = f(x)$$

im Widerspruch zur Injektivität von f. Also konvergiert $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x = f^{-1}(y)$. Damit ist die Stetigkeit von f^{-1} gezeigt. □

Als Anwendung erhalten wir insbesondere die Stetigkeit der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Satz 11.5. *Der natürliche Logarithmus* $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend mit* $\log(1) = 0$ *und*

(i) $\log(xy) = \log x + \log y$ *für alle* $x, y > 0$,

(ii) $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$,

(iii) $\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ *für alle* $x > 0$.

Beweis. Aus Satz 7.3 folgt, dass

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\exp(-n),\ \exp(n)\right[.$$

Da die Stetigkeit nach Bemerkung 10.6(b) eine lokale Eigenschaft ist, genügt es zum Beweis der Stetigkeit des Logarithmus zu zeigen, dass $\log : [\exp(-n),\ \exp(n)] \to \mathbb{R}$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Die Stetigkeit dieser Funktionen folgt aber direkt aus Satz 11.4. Es genügt diesen Satz anzuwenden auf die stetigen streng monoton wachsenden Funktionen $\exp : [-n, n] \to \mathbb{R}$. Das gleiche Argument zeigt auch, dass der Logarithmus streng monoton wächst.

Teil (i) folgt wegen der Injektivität der Exponentialfunktion aus der Beobachtung, dass für alle $x, y > 0$ gilt

$$\exp(\log x + \log y) = \exp(\log x)\exp(\log y) = xy = \exp(\log(xy)).$$

Zum Beweis des ersten Teils von (ii) fixieren wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+^*$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Würde $(\log x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $-\infty$ konvergieren, so gäbe es ein $R > 0$ mit $\log x_n \geq -R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Hieraus würde folgen, dass $x_n = \exp(\log x_n) \geq \exp(-R) > 0$ wäre für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass (x_n) gegen 0 konvergiert. Also gilt $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$. Völlig analog folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ ist.

Für den Beweis der Ungleichungen in (iii) dürfen wir voraussetzen, dass $x \neq 1$ ist. Sei $x > 1$ und sei $y = \frac{1}{x} - 1$. Dann ist

$$e^{x-1} = 1 + (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)}{n!} \geq x.$$

Da $\log x$ monoton wächst, folgt $x - 1 = \log(e^{x-1}) \geq \log x$.

Wegen $x > 1$ ist $y \in \,]-1, 0[$ und

$$e^y = 1 + y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \left(\frac{|y|^2}{2!} - \frac{|y|^3}{3!}\right) + \left(\frac{|y|^4}{4!} - \frac{|y|^5}{5!}\right) + \ldots \geq 1 + y > 0.$$

Folglich gilt

$$e^{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{1+y} = x$$

und daher

$$\frac{x-1}{x} = \log e^{(1-\frac{1}{x})} \leq \log x.$$

Damit sind für $x > 1$ beide Ungleichungen in (iii) gezeigt. Für $0 < x < 1$ ist $\frac{1}{x} > 1$ und daher

$$1 - x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \leq \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Damit ist auch in diesem Fall die Gültigkeit beider Ungleichungen bewiesen. □

Satz 11.6 (Allgemeine Potenzen)**.** *Es gilt:*

(a) Für $a > 0$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x$ stetig.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ a \mapsto a^x$ stetig.

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y},\ (a^x)^y = a^{xy}, \\ a^x b^x &= (ab)^x,\ \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

Beweis. Da nach Satz 9.12(c) Kompositionen stetiger Funktionen stetig sind, folgen die Teile (a) und (b) aus der Stetigkeit von Exponentialfunktion und Logarithmus sowie der Darstellung

$$a^x = \exp(x \log a).$$

Zum Beweis von (c) beachte man, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gilt

$$a^x a^y = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp((x + y) \log a) = a^{x+y}.$$

Wegen $a^x = \exp(x \log a)$ ist $\log(a^x) = x \log a$ und daher

$$(a^x)^y = \exp(y \log(a^x)) = \exp(xy \log a) = a^{xy}.$$

Für $a, b > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt mit Satz 11.5(i)

$$\begin{aligned} a^x b^x &= \exp(x \log a) \exp(x \log b) = \exp(x(\log a + \log b)) \\ &= \exp(x \log(ab)) = (ab)^x \end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x\log\frac{1}{a}\right) = \exp((-x)\log a) = a^{-x} = \frac{1}{\exp(x\log a)} = \frac{1}{a^x}.$$

Damit sind alle Teile von Satz 11.6 bewiesen. $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Berechnung einiger wichtiger Grenzwerte.

Beispiele 11.7. (a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$.

Beweis. Für $x > 0$ gilt $\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{1}{(k+1)!}\frac{x^{k+1}}{x^k} \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$.

Beweis. Es gilt $x^k e^{-x} = 1/(e^x/x^k) \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 0$ nach Teil (a).

(c) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ gilt $\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$.

Beweis. Mit der Kettenregel für Grenzwerte (Satz 9.9) erhält man

$$0 < x^\alpha = \exp(\alpha\log x) \overset{(x\downarrow 0)}{\longrightarrow} 0,$$

denn nach Satz 11.5 ist $\lim_{x\downarrow 0}(\alpha\log x) = -\infty$ und nach Satz 7.3 gilt $\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \overset{(x\downarrow 0)}{\longrightarrow} \infty.$$

(d) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

Beweis. Wir schreiben

$$\frac{\log x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha\log x}{\exp(\alpha\log x)} = \frac{1}{\alpha}h(f(x))$$

mit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\log x$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x}{\exp(x)}$. Dann folgt die Behauptung wegen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} h(x) \overset{(b)}{=} 0$$

aus der Kettenregel für Grenzwerte (Satz 9.9).

(e) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ist $\lim_{x\downarrow 0}(x^\alpha \log x) = 0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Kettenregel (Satz 9.9) unter Benutzung von Teil (d)

$$x^\alpha \log x = -\frac{\log(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^\alpha} \overset{(x\downarrow 0)}{\longrightarrow} 0.$$

(f) Es gilt $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Beweis. Nach Satz 7.3(iv) gilt für $0 < |x| \leq 1$

$$\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| \leq |x|e \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 0.$$

(g) Es ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Dies folgt aus Teil (d), denn

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log n\right) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \exp(0) = 1.$$

(h) Für jede reelle Zahl $c > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Beweis. Für $c > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \exp(\frac{1}{n}\log c) = \exp(0) = 1$.

(i) Es gilt $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Beweis. Nach Teil (iii) in Satz 11.5 gilt

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1$$

für alle $x > 0$. Folglich gilt für $x > 1$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\log x}{x-1} \leq 1$$

und für $x \in (0,1)$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{\log x}{x-1} \geq 1.$$

Wegen $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$ erhalten wir die Behauptung zunächst für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1 = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\log x}{x-1}.$$

Mit dem ϵ-δ-Kriterium für Grenzwerte (Satz 10.5(a)) folgt hierhaus leicht die Behauptung.

12 Komplexe Zahlen

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf vermöge der Identifizierung

$$\mathbb{R} \tilde{=} \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

und setzen die Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ fort zu Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + \quad &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y)+(x',y') &&= (x+x', y+y'), \\ \cdot \quad &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y)\cdot(x',y') &&= (xx'-yy', xy'+yx'). \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, dass $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ein Körper ist, das heißt die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind assoziativ, kommutativ, distributiv und $(\mathbb{R}^2,+)$, $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ haben neutrale Elemente und Inverse im Sinne von Definition 2.1. Man nennt $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ den Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen.*

Schreibt man x statt $(x,0)$ und i statt $(0,1)$, so gilt für alle $x,y,x',y' \in \mathbb{R}$

(1) $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$,

(2) $(x,y) = (x,0)+(0,y) = x+(0,1)(y,0) = x+iy$,

(3) $(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy', xy'+yx') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$,

(4) $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ für $(x,y)\neq(0,0)$.

Definition 12.1. Für $z = x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ definiert man

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= x && (\textit{Realteil}\text{ von } z), \\ \operatorname{Im} z &= y && (\textit{Imaginärteil}\text{ von } z), \\ \overline{z} &= x-iy && (\textit{komplex konjugierte Zahl}\text{ zu } z), \\ |z| &= \sqrt{x^2+y^2} && (\textit{Absolutbetrag}\text{ von } z). \end{aligned}$$

Lemma 12.2. *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $z\overline{z} = |z|^2$, $|\overline{z}| = |z|$, $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z\neq 0)$,

(b) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z\neq 0)$, $\overline{(\overline{z})} = z$,

(c) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Beweis. Alle Formeln folgen mit einfachen Rechnungen direkt aus den Definitionen. □

Der komplexe Absolutbetrag hat ganz ähnliche Eigenschaften wie der reelle Absolutbetrag.

Lemma 12.3. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$ *ist,*

(b) $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. Teil (a) ist klar. Die zweite Ungleichung in (b) folgt aus

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung in (b) folgt wie für den reellen Absolutbetrag aus der zweiten, denn

$$|z| = |z + w + (-w)| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$$

impliziert, dass $|z| - |w| \leq |z + w|$. Indem man die Rollen von z und w vertauscht, erhält man, dass auch $|w| - |z| \leq |w + z| = |z + w|$ gilt. Damit folgt auch die erste Ungleichung in Teil (b). □

Wie in $\mathbb{R}$ definiert man die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Absolutbetrages.

Definition 12.4. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $c \in \mathbb{C}$.

(a) Man nennt $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Limes* c (geschrieben $\lim_{n\to\infty} c_n = c$), falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|c_n - c| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(b) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|c_n - c_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.

Aus der Definition des komplexen Absolutbetrages folgt, dass

$$\max(|\mathrm{Re}\ z|,\ |\mathrm{Im}\ z|) \leq |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2} \leq |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z|$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Satz 12.5. *Für eine Folge* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *und* $c \in \mathbb{C}$ *ist*

(a) $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ *genau dann, wenn* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ c_n = \mathrm{Re}\ c$ *und* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ c_n = \mathrm{Im}\ c$ *gilt,*

(b) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge genau dann, wenn* $(\mathrm{Re}\ z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}\ z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folgen in* $\mathbb{R}$ *sind.*

Beweis. Teil (a) folgt aus der Gültigkeit der Ungleichungen

$$\max(|\mathrm{Re}\ c_n - \mathrm{Re}\ c|,\ |\mathrm{Im}\ c_n - \mathrm{Im}\ c|) \leq |c_n - c| \leq |\mathrm{Re}\ c_n - \mathrm{Re}\ c| + |\mathrm{Im}\ c_n - \mathrm{Im}\ c|.$$

Dieselben Abschätzungen mit c_m statt c implizieren Teil (b). □

Aus der Dreiecksungleichung für den komplexen Absolutbetrag folgt wie in $\mathbb{R}$, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge ist. Auch die umgekehrte Implikation gilt.

Korollar 12.6. *In $\mathbb{C}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent (abkürzend dafür sagt man, dass $\mathbb{C}$* vollständig *ist).*

Beweis. Die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ folgt mit Satz 12.5 direkt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. $\square$

Auch in $\mathbb{C}$ gelten die Grenzwertsätze für Folgen.

Satz 12.7. *Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$ und seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w,\ \lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw.$

(b) Ist $w \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $w_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes solche n_0 gilt $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$.

Beweis. Entweder führt man alle Aussagen mit Hilfe von Satz 12.5(a) auf die Gültigkeit der reellen Grenzwertsätze (Satz 4.7) zurück, oder man wiederholt den Beweis von Satz 4.7 mit komplexen Absolutbeträgen statt reellen. $\square$

Genauso wie in $\mathbb{R}$ definiert man die Konvergenz von Reihen in $\mathbb{C}$.

Definition 12.8. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

(a) Man definiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ und nennt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergent mit Grenzwert c* (geschrieben $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c$), falls $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n = c$ ist.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.

Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, gilt auch die komplexe Version des Cauchy-Kriteriums (vergleiche mit Satz 6.2).

Folgerung 12.9. *(a) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert und $|\sum_{n=0}^{\infty} c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ (vergleiche Satz 6.5).*

(b) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen, so gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ (siehe Satz 6.3).

(c) Das Majorantenkriterium (Satz 6.7), das Quotientenkriterium (Satz 6.9), das Wurzelkriterium (Bemerkung 6.10(d)), der Umordnungssatz (Satz 6.14) und der Satz über das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen (Satz 6.15) bleiben wortwörtlich richtig einschließlich der Beweise, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.

Definition 12.10. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Man nennt f *stetig in $a \in D$*, falls $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ ist für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Im Folgenden wird die *komplexe Exponentialfunktion* eine wichtige Rolle spielen.

Satz 12.11. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent. Es gilt:

(i) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w),\ \exp(z) \neq 0,\ \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$,

(ii) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}),\ |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\ z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(iii) $|\exp(it)| = 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$,

(iv) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$ *ist stetig.*

Beweis. Wegen $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$. Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren, folgt mit dem Satz über das Cauchy-Produkt und der komplexen Version des Binomialtheorems (Satz 1.6)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}.$$

Der Rest von (i) folgt wie im reellen Fall direkt aus der gerade bewiesenen Funktionalgleichung. Die Verträglichkeit der komplexen Exponentialfunktion mit der komplexen Konjugation folgt aus

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \overline{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)} = \overline{\exp(z)}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ wegen

$$|\overline{z} - \overline{w}| = |z - w| \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

stetig ist. Der zweite Teil von (ii) folgt aus dem ersten, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z}) = \exp(2\mathrm{Re}\ z) = \exp(\mathrm{Re}\ z)^2.$$

Insbesondere erhält man $|\exp(it)| = \exp(\mathrm{Re}\ (it)) = \exp(0) = 1$ für alle reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$. Zum Beweis der in (iv) behaupteten Stetigkeit der Exponentialfunktion sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$|\exp(z_n) - \exp(z)| = |\exp(z)|\ |\exp(z_n - z) - 1|$$

und für $|z_n - z| \leq 1$ ist

$$|\exp(z_n - z) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_n - z)^k}{k!}\right| \leq |z_n - z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z_n - z|^{k-1}}{k!} \leq |z_n - z| \exp|z_n - z| \leq e|z_n - z|.$$

Beides zusammen ergibt $\lim_{n\to\infty} \exp(z_n) = \exp(z)$. Also ist auch die komplexe Exponentialfunktion stetig. □

13 Die trigonometrischen Funktionen

Wir schreiben die Werte der komplexen Exponentialfunktion im Folgenden auch als

$$e^z = \exp(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Geometrisch definiert man üblicherweise die Werte der Winkelfunktionen $\cos t, \sin t$ als x-Koordinate bzw. y-Koordinate des Schnittpunktes des Halbstrahls vom Koordinatenursprung in Richtung des Winkels t mit dem Einheitskreis. Wir haben in Satz 12.11 gesehen, dass alle komplexen Zahlen der Form $e^{it} = \exp(it) \quad (t \in \mathbb{R})$ auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ liegen.

Definition 13.1. Für $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\cos t = \mathrm{Re}\ e^{it} \text{ und } \sin t = \mathrm{Im}\ e^{it}.$$

Mit den in Satz 12.11 hergeleiteten Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion erhält man sofort einige elementare Eigenschaften der so definierten Funktionen.

Lemma 13.2. *(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $e^{it} = \cos t + i \sin t$ (Eulersche Formel),

(ii) $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$,

(iii) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

(b) Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos t$ *und* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin t$ *sind stetig.*

Beweis. Teil (a) folgt direkt aus der Definition. Zum Beweis von Teil (b) sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Limes $t \in \mathbb{R}$. Nach Satz 12.11 gilt dann $\lim_{n\to\infty} e^{it_n} = e^{it}$. Mit Satz 12.5 erhält man, dass $\lim_{n\to\infty} \cos t_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ e^{it_n} = \mathrm{Re}\ e^{it} = \cos t$ und $\lim_{n\to\infty} \sin t_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ e^{it_n} = \mathrm{Im}\ e^{it} = \sin t$ ist. □

Die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion impliziert die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus.

Satz 13.3 (Additionstheoreme)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(b) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Beweis. Definitionsgemäß gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}\ e^{i(x+y)} = \mathrm{Re}\ (e^{ix}e^{iy}) = \mathrm{Re}\ e^{ix}\mathrm{Re}\ e^{iy} - \mathrm{Im}\ e^{ix}\mathrm{Im}\ e^{iy} = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Völlig analog erhält man die Formel in (b). □

Mit der Reihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion erhält man sehr einfach Reihendarstellungen für Sinus und Cosinus.

Satz 13.4. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

wobei die Reihen absolut konvergieren in jedem $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die absolute Konvergenz der ersten Reihe folgt aus der Beschränktheit der Partialsummenfolge

$$\sum_{k=0}^{n} \left| (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{|x|^k}{k!} \leq e^{|x|} < \infty.$$

Eine analoge Abschätzung liefert die absolute Konvergenz der zweiten Reihe. Wegen $i^2 = -1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (i^2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} (i^2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2^{k+1})!}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Satz 12.5(a) benutzt. Durch Real- und Imaginärteilvergleich erhält man die behaupteten Reihendarstellungen. □

Fehlerabschätzungen zeigen, wie gut sich die Werte von Cosinus und Sinus durch die endlichen Teilsummen der darstellenden Reihen approximieren lassen.

Lemma 13.5 (Restgliedabschätzungen)**.** *Seien $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ definiert durch*

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x). \end{aligned}$$

Dann gelten für $n \geq 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |r_{2n+2}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3, \\ |r_{2n+3}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \leq 2n+4. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ erhält man insbesondere, dass $|\cos x - 1| = |r_2(x)| \leq \frac{|x|^2}{2}$ für $|x| \leq 3$ und $|\sin x - x| = |r_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$ für $|x| \leq 4$ gilt.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|r_{2n+2}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| = |1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots| \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

mit (man klammere $(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ aus!)

$$a_i = a_i(x) = \frac{|x|^{2i}}{(2n+3) \cdots (2n+2i+2)} \quad (i \geq 1).$$

Setzt man $a_0 = 1$, so ist wegen

$$a_i = \frac{|x|^2}{(2n+2i+1)(2n+2i+2)} a_{i-1} \leq a_{i-1}$$

für $i \geq 1$ und $|x| \leq 2n+3$ die Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ monoton fallend. Da die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergiert, erhält man durch Zusammenfassen jeweils zweier aufeinander folgender Summanden die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - (a_5 - a_6) - \ldots \\ &\geq (1 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots \geq 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man für $|x| \leq 2n+3$, dass

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ganz ähnlich folgt die Restgliedabschätzung für den Sinus. $\square$

Korollar 13.6. *Es gilt*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ und } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Für $0 < x < \sqrt{6}$ *ist* $\sin x > 0$.

Beweis. Für $0 < |x| \leq 4$ gilt nach Satz 13.5

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x - x}{x} \right| \leq \frac{|x|^2}{6} \stackrel{(x \to 0)}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1$ für $|x| < \sqrt{6}$ ist $\sin x > 0$ für $0 < x < \sqrt{6}$. Für $0 < |x| \leq 3$ gilt nach Satz 13.5

$$\left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \leq \frac{|x|}{2} \stackrel{(x \to 0)}{\longrightarrow} 0.$$

Damit sind alle Teile des Korollars gezeigt. $\square$

Im Folgenden wollen wir unter anderem die Nullstellen von Cosinus und Sinus bestimmen.

Satz 13.7. *Es gibt genau ein $x \in]0,2[$ mit $\cos x = 0$.*

Beweis. Wir begründen zunächst die Existenz einer Nullstelle in $]0,2[$. Lemma 13.5 mit $n = 1$ liefert für $|x| \leq 5$ die Restgliedabschätzung $|r_4(x)| \leq |x|^4/4!$. Insbesondere gilt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + r_4(2) \leq -1 + |r_4(2)| \leq -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}.$$

Wegen $\cos 0 = 1$ impliziert der Zwischenwertsatz (Satz 10.1) angewendet auf die stetige Funktion $\cos|_{[0,2]}$ die Existenz einer Nullstelle in $]0,2[$. Um zu begründen, dass es nur eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$ gibt, genügt es zu zeigen, dass der Cosinus streng monoton fällt auf diesem Intervall. Für $s,t \in \mathbb{R}$ erhält man mit Satz 13.3, dass

$$\cos(s+t) - \cos(s-t) = (\cos s \cos t - \sin s \sin t) - (\cos s \cos(-t) - \sin s \sin(-t)) = -2 \sin s \sin t.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\cos(-t) = \cos t$ und $\sin(-t) = -\sin t$ ist (siehe Satz 13.4). Für $0 \leq x < x' \leq 2$ ist

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin\left(\frac{x'+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x'-x}{2}\right) < 0,$$

denn nach Korollar 13.6 sind die beiden hier auftretenden Werte vom Sinus positive reelle Zahlen. Damit ist gezeigt, dass die Einschränkung von Cosinus auf das Intervall $[0,2]$ streng monoton fällt. □

Definition 13.8. Wir definieren π als die eindeutige reelle Zahl x im Intervall $]0,4[$ mit $\cos\frac{x}{2} = 0$.

Man kann zeigen, das π eine irrationale Zahl ist (siehe etwa [Aigner-Ziegler, Proofs from the book, Chapter 6]). Eine näherungsweise Berechnung der Zahl π findet man in [O. Forster, Analysis 1].

Korollar 13.9. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i,\ e^{2\pi i} = 1,$

(b) $\cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x,$

(c) $\cos(x \pm \pi) = -\cos x,\ \sin(x \pm \pi) = -\sin x,$

(d) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

Beweis. (a) Da $\frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle von cos in $]0,2[$ ist und da $\sin x > 0$ ist nach Korollar 13.6 für $x \in]0,2[$, folgt mit Lemma 13.2, dass

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{2}} = 1$$

ist. Damit erhält man, dass $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$ ist. Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 12.11) sieht man, dass $e^{in\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = i^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Teile (b)-(d) folgen aus Teil (a) mit Definiton 13.1 und den Additionstheoremen (Satz 13.3). □

Korollar 13.10. *Es gilt:*

(a) $\{x \in \mathbb{R};\ \sin x = 0\} = \pi\mathbb{Z}\ (= \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\})$,

(b) $\{x \in \mathbb{R};\ \cos x = 0\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\ (= \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\})$,

(c) $\{x \in \mathbb{R};\ e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}\ (= \{2\pi k; k \in \mathbb{Z}\})$.

Beweis. Wegen $\sin 0 = 0$ und $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da $\cos|_{[0,2]}$ nach dem Beweis von Satz 13.7 streng monoton fällt und da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist, folgt

$$\cos x = \cos(-x) > 0 \text{ für } x \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Mit Korollar 13.9 erhält man

$$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) > 0 \text{ für } x \in]0, \pi[.$$

Ebenfalls nach Korollar 13.9 gilt $|\sin(x \pm \pi)| = |\sin x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Induktiv folgt daher, dass $|\sin x| > 0$ ist auf jedem Intervall der Form $]k\pi, (k+1)\pi[$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit ist Teil (a) bewiesen. Teil (b) folgt aus Teil (a), da $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ (Korollar 13.9). Da die komplexe Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt (Satz 12.11), folgt aus der Darstellung

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}(e^{ix} - 1)$$

zusammen mit Teil (a) die Gültigkeit von Teil (c). □

Wir wissen (Satz 12.11), dass die komplexen Zahlen der Form e^{it} ($t \in \mathbb{R}$) auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ liegen. Mit dem Zwischenwertsatz folgt umgekehrt, dass jede Zahl auf dem Einheitskreis eine solche Darstellung besitzt.

Korollar 13.11 (Polarkoordinaten)**.** *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die Gestalt*

$$z = re^{it} \textit{ mit } r \geq 0 \textit{ und } t \in [0, 2\pi[.$$

Für $z \neq 0$ ist t eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $z \neq 0$ ist.
Hat z die angegebene Darstellung, so ist notwendigerweise $r = |z|$. Definiert man $r = |z|$, so ist $\mathrm{Re}\ z/r \in [-1, +1]$. Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 10.1) angewendet auf die stetige Funktion $\cos|_{[0,\pi]}$ existiert ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \mathrm{Re}\ z/r$. Dann ist

$$(\mathrm{Im}\ z)^2 = |z|^2 - (\mathrm{Re}\ z)^2 = r^2(1 - \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\varphi$$

und daher

$$z = \mathrm{Re}\ z + i\mathrm{Im}\ z = r\cos\varphi \pm ir\sin\varphi = re^{it}$$

mit $t = \varphi$ oder $t = -\varphi$. Ist $z = re^{it_0} \neq 0$ mit irgendeiner reellen Zahl t_0, so ist $r = |z|$ und mit Korollar 13.10(c) erhält man, dass

$$\{t \in \mathbb{R};\ z = re^{it}\} = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$$

ist. Da jedes Intervall der Form $[a, a+2\pi[$ mit $a \in \mathbb{R}$ genau eine Zahl aus $t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ enthält, folgt auch die behauptete Eindeutigkeit. $\square$

Definition 13.12. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ setzt man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Satz 13.13. *(a) Die Abbildung* $\cos :\ [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv und streng monoton fallend. Die stetige und streng monoton fallende Umkehrfunktion* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *heißt* Arcus-Cosinus.

(b) Die Abbildung $\sin :\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv und streng monoton wachsend mit stetiger und streng monoton wachsender Umkehrfunktion (*Arcus-Sinus*)* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Die Abbildung $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *ist bijektiv und streng monoton wachsend mit stetiger und streng monton wachsender Umkehrfunktion (*Arcus-Tangens*)* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Beweis. (a) Nach dem Beweis von Satz 13.7 ist die Funktion $\cos|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ streng monoton fallend. Wegen $\cos x = -\cos(\pi - x)$ ist auch $\cos|_{[\frac{\pi}{2},\pi]}$ streng monoton fallend. Da $\cos 0 = 1$ und $\cos\pi = -1$ ist, zeigt der Zwischenwertsatz (Satz 10.1), dass $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Die übrigen Behauptungen in (a) folgen aus Satz 11.4 (und Lemma 13.2(b)).

(b) Die Behautungen in Teil (b) folgen wegen $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ aus Teil (a) zusammen mit Satz 11.4.

(c) Als wohldefinierter Quotient stetiger Funktionen ist $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ stetig (Satz 9.12). Da $\sin x > 0$ und $\cos x > 0$ auf $]0, \frac{\pi}{2}[$ ist, folgt aus dem in (a) und (b) beschriebenen Monotonieverhalten von Cosinus und Sinus, dass die Funktion $\tan|_{[0,\frac{\pi}{2}[}$ streng monoton wächst (benutze Satz 3.4(b)). Da $\tan x = -\tan(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$ gilt, ist $\tan x$ auch streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, 0]$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, \frac{\pi}{2}[$ mit Limes $\frac{\pi}{2}$, so folgt aus

$$0 < \frac{\cos x_n}{\sin x_n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

mit Satz 4.20, dass $(\tan x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\sin x_n}{\cos x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \overset{(n\in\infty)}{\longrightarrow} \infty$. Also ist $\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ und $\lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} -\tan(-x) = -\infty$. Die strenge Monotonie impliziert die Injektivität von $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ und der Zwischenwertsatz (Satz 10.1) die Surjektivität. Ähnlich wie wir im Beweis von Satz 11.5 die Stetigkeit des Logarithmus begründet haben, erhält man mit Satz 11.4 die Stetigkeit des Arcus-Tangens. $\square$

14 Differentialrechnung

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ approximierbar in $D \setminus \{x_0\}$. Den Grenzwert für $x \to x_0$ der Steigungen
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ auf dem Graphen von f nennt man, wenn er existiert, die *Ableitung* von f im Punkt x_0. Anschauliche Vorstellung ist, dass dieser Grenzwert der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0 entsprechen sollte.

Definition 14.1. Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt *differenzierbar in* x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert (vergleiche Definition 9.6). In diesem Fall nennt man $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f in x_0. Man nennt f *differenzierbar auf* D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist. Statt $f'(x)$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x)$.

Bemerkung 14.2. Die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

ist äquivalent zur Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ 0 \neq h \in D - x_0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Hierbei sei $D - x_0 = \{x - x_0;\ x \in D\}$. Existieren die Grenzwerte, so sind sie gleich. Dies folgt als einfache Anwendung der Kettenregel (Satz 9.9) für Grenzwerte.

Beispiele 14.3. (a) Für eine konstante Funktion $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) und $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Also ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ die Potenzfunktion mit Exponent n. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x - x_0} \overset{(x \to x_0)}{\longrightarrow} n x_0^{n-1}.$$

Also ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = n\, x^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$. Dann gilt für festes $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0} \frac{(\frac{1}{x})^{|n|} - (\frac{1}{x_0})^{|n|}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \longrightarrow -\frac{1}{x_0^2} |n| \left(\frac{1}{x_0}\right)^{|n|-1} = nx_0^{n-1},$$

wobei der Grenzwert für $x \to x_0,\ x \neq x_0$, gebildet wird. Also ist f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) Die Exponentialfunktion $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn mit Beispiel 11.7(f) folgt, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \exp(x_0) \frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0} \longrightarrow \exp(x_0)$$

konvergiert für $x \to x_0,\ x \neq x_0$.

(e) Sei $f = \log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ die Logarithmusfunktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Mit Beispiel 11.7(i) und der Kettenregel (Satz 9.9) für Grenzwerte folgt, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{\log(\frac{x}{x_0})}{\frac{x}{x_0} - 1} \longrightarrow \frac{1}{x_0}$$

für $x \to x_0,\ x \neq x_0$, denn $\lim_{x \to x_0} \frac{x}{x_0} = 1$. Also ist der Logarithmus differenzierbar auf $\mathbb{R}_+^*$ mit $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1,$$

und für $x < 0$ ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{x}{x} = -1.$$

Also existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ und $\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$, aber f ist nicht differenzierbar in 0, denn für die Nullfolge $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist die Folge $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = (-1)^n$ nicht konvergent.

(g) Die Funktion $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $\sin'(x) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn nach Satz 13.3 und Korollar 13.6 gilt

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \longrightarrow \cos x$$

für $h \to 0,\ h \neq 0$.

(h) Die Funktion $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $\cos'(x) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn wie in (g) folgt, dass

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \longrightarrow -\sin x$$

für $h \to 0,\ h \neq 0$.

Definition 14.4. Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$. Man nennt f *rechtsseitig differenzierbar* in x_0, wenn der Grenzwert

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert. Entsprechend heißt f *linksseitig differenzierbar* in x_0, falls der Grenzwert

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert.

Bemerkung 14.5. Ist x_0 approximierbar in $\{x \in D;\ x > x_0\}$ und in $\{x \in D;\ x < x_0\}$, so ist f differenzierbar in x_0 genau dann, wenn f rechts- und linksseitig differenzierbar ist in x_0 und $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ ist. Dies folgt direkt aus dem ϵ-δ-Kriterium für die Existenz von Grenzwerten (Satz 10.6).

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn sie in x_0 im folgenden Sinne *linear approximierbar* ist.

Satz 14.6. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$. Dann ist f differenzierbar in x_0 genau dann, wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $h : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ existieren mit*

(i) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + h(x)$ *für* $x \in D \setminus \{x_0\}$ *und*

(ii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{h(x)}{x - x_0} = 0.$

In diesem Fall ist $f'(x_0) = c$.

Beweis. Sei f differenzierbar in x_0. Für $c = f'(x_0)$ und die durch $h : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$ definierte Funktion h gilt dann offensichtlich (i) und

$$\frac{h(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \longrightarrow 0$$

für $x \to x_0,\ x \neq x_0$.
Sind umgekehrt die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt, so konvergiert

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \frac{h(x)}{x - x_0}$$

gegen c für $x \to x_0,\ x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$. $\square$

Als erste Folgerung erhalten wir, dass Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft ist als Stetigkeit.

Korollar 14.7. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist f stetig in x_0.*

Beweis. Für c und h wie in Satz 14.6 konvergiert

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \frac{h(x)}{x - x_0}(x - x_0)$$

gegen $f(x_0)$ für $x \to x_0,\ x \neq x_0$. Also ist f stetig in x_0 (siehe Bemerkung 10.7). □

Beispiel 14.3(f) zeigt, dass die umgekehrte Implikation in Korollar 14.7 im Allgemeinen falsch ist.

Satz 14.8. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt x_0 und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:*

(a) $f + g, fg$ und αf sind differenzierbar in x_0 mit

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\ (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

(b) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' = \{x \in D;\ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Nach den Grenzwertsätzen für Funktionen (Satz 9.8) folgt die Konvergenz von

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0) + g'(x_0), \\ \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} &= \alpha\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow \alpha f'(x_0), \\ \frac{(fg)(x) - (fg)/x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

für $x \to x_0,\ x \neq x_0$. Dabei haben wir im dritten Teil auch Korollar 14.7 benutzt.
Ist $g(x_0) \neq 0$, so folgt aus der Stetigkeit von g in x_0 (Korollar 14.7), dass x_0 auch in $D' \setminus \{x_0\}$ approximierbar ist. Wir beweisen die Quotientenregel zunächst für den Fall $f \equiv 1$. Mit Korollar 14.7 und den Grenzwertsätzen für Funktionen erhält man

$$\frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)} \longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

für $x \to x_0,\ x_0 \in D' \setminus \{x_0\}$. Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall $f \equiv 1$ mit der Produktregel

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = f'(x_0)(\frac{1}{g})(x_0) + f(x_0)(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Damit sind alle Teile von Satz 14.8 bewiesen. □

Beispiel 14.9. Aus der Differenzierbarkeit der konstanten Funktionen und der identischen Funktion auf $\mathbb{R}$ (Beispiel 14.3(a) und (b)) folgt zusammen mit Satz 14.8, dass jede rationale Funktion

$$r : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \quad (p, q \text{ Polynomfunktionen}, q \equiv 0)$$

differenzierbar ist auf $D = \{x \in \mathbb{R};\ q(x) \neq 0\}$.

Satz 14.10 (Kettenregel)**.** *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ Teilmengen, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Ist f differenzierbar in a und ist g differenzierbar in $f(a)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Beweis. Die Funktionen $\varphi_f : D \to \mathbb{R}$, $\varphi_g : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \text{ für } x \neq a,\ \varphi_f(a) = 0, \\ \varphi_g(x) &= \frac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)} - g'(f(a)) \text{ für } x \neq f(a),\ \varphi_g(f(a)) = 0 \end{aligned}$$

sind stetig in a bzw. in $f(a)$. Für $x \in D$ gilt

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \varphi_g(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + (g'(f(a))f'(a))(x - a) + h(x)(x - a), \end{aligned}$$

wobei $h(x) = g'(f(a))\varphi_f(x) + \varphi_g(f(x))f'(a) + \varphi_g(f(x))\varphi_f(x)$ gegen 0 konvergiert für $x \to a$. Man beachte dabei, dass f als differenzierbare Funktion in a nach Korollar 14.7 auch stetig in a ist. Nach Satz 14.6 ist $g \circ f$ defferenzierbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

Beispiele 14.11. (a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Potenzfunktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$$

nach der Kettenregel (Satz 14.10) differenzierbar mit

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx} \exp\right)(\alpha \log x) \frac{d}{dx}(\alpha \log x) = \exp(\alpha \log x)\frac{\alpha}{x} = \alpha\ x^{\alpha - 1}$$

für alle $x > 0$. Dabei haben wir die Differenzierbarkeit von exp und log (Beispiele 14.3) und die Potenzrechenregeln (Satz 11.6) benutzt.

(b) Für $a \in \mathbb{R}_+^*$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x = \exp(x \log a)$ nach der Kettenregel differenzierbar mit

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx} \exp\right)(x \log a) \frac{d}{dx}(x \log a) = \exp(x \log a) \log a = (\log a) a^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 14.12 (Umkehrfunktionen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $g = f^{-1} : [c, d] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f auf dem Intervall $[c, d]$ mit Grenzen*

$$c = \min f([a, b]) \text{ und } d = \max f([a, b]).$$

Ist f differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ und ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass $g([c,d]\setminus\{y_0\}) = [a,b]\setminus\{x_0\}$ ist. Da g nach Satz 11.4 stetig ist, folgt mit der Quotienten- und Kettenregel für Grenzwerte (Satz 9.8(c) und Satz 9.9), dass

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}} \longrightarrow \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

für $y \to y_0,\ y \in [c,d]\setminus\{y_0\}$. □

Auf die Voraussetzung, dass $f'(x_0) \neq 0$ ist, kann man in Satz 14.12 nicht verzichten. So ist etwa die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ differenzierbar (also auch stetig) und streng monoton wachsend mit $f([-1,1]) = [-1,1]$. Aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist wegen

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty$$

nicht differenzierbar im Punkt 0.

Beispiele 14.13. (a) Die Funktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist definiert als die Umkehrfunktion der Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ (siehe Satz 13.13). Nach Satz 14.12 ist arcsin in jedem Punkt $y_0 \in]-1,1[$ differenzierbar, und für $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $y_0 = \sin x_0$ gilt

$$\arcsin' y_0 = \frac{1}{\sin'(x_0)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

(b) Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist definitionsgemäß die Umkehrfunktion der bijektiven streng monoton wachsenden Funktion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ (Satz 13.13).

Für $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt nach Satz 14.8(b)

$$\tan'(x_0) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0) = \frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0 \neq 0.$$

Nach Satz 14.12 ist daher die Funktion arctan in jedem Punkt $y_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und für $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $\tan x_0 = y_0$ gilt

$$\arctan'(y_0) = \frac{1}{\tan'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

Man wende dabei Satz 14.12 an auf die Einschränkung des Tangens auf ein beliebiges Intervall $[a,b] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $x_0 \in]a,b[$.

Definition 14.14 (*Höhere Ableitungen*)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge so, dass jeder Punkt $a \in D$ in $D\setminus\{a\}$ approximierbar ist (zum Beispiel ein Intervall positiver Länge) und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

(a) Die Funktion f heißt *1-mal differenzierbar* auf D, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $f^{(1)} : D \to \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) = f'(x)$ die *erste Ableitung* von f. Rekursiv definiert man die k-malige Differenzierbarkeit und die k-ten Ableitungen von f. Man nennt die Funktion f *k-mal differenzierbar*, falls sie $(k-1)$-differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung $f^{(k-1)} : D \to \mathbb{R}$ wieder differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f^{(k)} = (f^{(k-1)})' : D \to \mathbb{R}$ die *k-te Ableitung* von f. Statt $f^{(k)}(x)$ schreibt man oft auch $\frac{d^k f}{dx^k}(x)$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}^*$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn sie k-mal differenzierbar ist und die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ noch stetig ist.

(c) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie k-mal differenzierbar für alle $k \in \mathbb{N}^*$ ist.

In der Situation von Definition 14.14 nennt man die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ manchmal auch 0-*mal differenzierbar*, wenn sie stetig ist.

15 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Die Differentialrechnung erlaubt es unter geeigneten Voraussetzungen, die Stellen zu bestimmen, in denen eine gegebene Funktion lokale und absolute Extrema besitzt.

Definition 15.1. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Punkt in D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definitionsgemäß besitzt die Funktion f ein *lokales Maximum* (*Minimum*) in x_0, falls ein $\epsilon > 0$ existiert so, dass

$$f(x) \leq f(x_0) \; (f(x) \geq f(x_0))$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt. Kann man $\epsilon > 0$ so wählen, dass sogar $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \epsilon$ gilt, so nennt man x_0 ein *isoliertes* oder *striktes lokales Maximum* (*Minimum*) für f. Man sagt, dass f ein (*isoliertes*) *lokales Extremum* in x_0 besitzt, wenn f in x_0 ein (isoliertes) lokales Maximum oder Minimum hat.

Wir formulieren als erstes ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

Satz 15.2 (Notwendige Bedingung)**.** *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in]a, b[$. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, dass f in x_0 ein lokales Minimum besitzt. Sonst ersetze man f durch die Funktion $-f$. Hat f in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Minimum, so gelten für genügend große natürliche Zahlen n die Abschätzungen

$$\frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \leq 0 \leq \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}.$$

Ist f außerdem differenzierbar in x_0, so übertragen sich diese Ungleichungen auf den Grenzwert der Differenzenquotienten (Satz 4.10)

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Also ist $f'(x_0) = 0$ in diesem Fall. □

Bemerkung.

(a) Das Kriterium aus Satz 15.2 ist nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums. So ist etwa die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Da aber $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$ ist, besitzt f in 0 kein lokales Extremum.

(b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a (oder b), so kann man aus dem Vorliegen eines lokalen Extremums in a (oder b) natürlich nicht auf das Verschwinden der Ableitung in diesem Punkt schließen. Man betrachte etwa die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Als Anwendung von Satz 15.2 kann man etwa zeigen, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ immer eine Nullstelle der Ableitung liegen muss. Dies ist ein Spezialfall des nächsten Satzes.

Satz 15.3 (Satz von Rolle)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b)$ stetig und $f|_{]a,b[}$ differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.*

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, dass f nicht konstant ist. Nach Satz 10.4 gibt es Stellen $s, t \in [a, b]$ mit $f(s) = \min f([a, b])$ und $f(t) = \max([a, b])$. Aus der Voraussetzung, dass f nicht konstant ist, aber $f(a) = f(b)$ gilt, folgt sofort, dass mindestens eine der beiden Zahlen s oder t im offenen Intervall $]a, b[$ liegt. Da f in s und in t insbesondere ein lokales Extremum besitzt, folgt die Behauptung mit Satz 15.2. □

Korollar 15.4 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b)$ stetig und sei $f|_{]a,b[}$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis. Man wende den Satz von Rolle (Satz 15.3) an auf die Funktion

$$h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

und beachte, dass es genügt, ein $x \in]a, b[$ zu finden mit $h'(x) = 0$. □

Korollar 15.5. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $f|_{]a,b[}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant.*

Beweis. Ist $c \in [a, b[$ beliebig, so folgt aus dem 1. Mittelwertsatz (Korollar 15.4) angewendet auf die Funktion $f|_{[c,b]}$ die Existenz einer Stelle $x \in]c, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(x) = 0.$$

Also ist $f(c) = f(b)$ für jedes $c \in [a, b[$ □

Aus dem Vorzeichen der Ableitung kann man unter geeigneten Voraussetzungen Rückschlüsse auf das Monotonieverhalten einer Funktion ziehen. Auch diese Beobachtung erlaubt es, in vielen Fällen die lokalen oder absoluten Extrema einer differenzierbaren Funktion zu bestimmen.

Satz 15.6 (Montonieverhalten)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f|_{]a,b[}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(a) Die Funktion f ist monoton wachsend (bzw. fallend) auf $[a, b]$ genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in]a, b[$ gilt.

(b) Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf $[a, b]$.

Beweis. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend auf $[a,b]$. Dann ist für $x \in]a,b[$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \geq 0,$$

wobei wir wieder Satz 4.10 benutzt haben. Man beachte dabei auch, dass die Differenzenquotienten zumindest für genügend große n Sinn machen. Gilt umgekehrt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,b[$ und sind $c,d \in [a,b]$ mit $c < d$ gegeben, so existiert nach dem 1. Mittelwertsatz (Korollar 15.4) angewendet auf die Funktion $f|_{[c,d]}$ ein $x \in]c,d[$ mit $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(x) \geq 0$. Also ist $f(d) \geq f(c)$ für alle $c,d \in [a,b]$ mit $c < d$. Setzt man voraus, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$ gilt, dann kann man an dieser Stelle schließen, dass sogar $f(d) > f(c)$ für alle $c,d \in [a,b]$ mit $c < d$ gilt. Die in Klammern behaupteten Fälle kann man genauso beweisen oder zurückführen auf die schon bewiesenen Fälle, indem man f durch $-f$ ersetzt. $\square$

Das Beispiel der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ zeigt wieder, dass in Teil (b) die umgekehrte Implikation im Allgemeinen falsch ist.

Satz 15.7 (Hinreichende Bedingungen für isolierte lokale Extrema)**.** *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in]a,b[$. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so hat f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Beweis. Es genügt, den Fall $f''(x_0) > 0$ zu betrachten. Sonst ersetze man$f$ durch die Funktion $-f$. In diesem Fall existiert wegen

$$0 < f''(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

nach dem ϵ-δ-Kriterium für Grenzwerte (Satz 10.6) ein $\delta > 0$ mit $[x_0-\delta,\ x_0+\delta] \subset]a,b[$ und $f'(x)/(x-x_0) > 0$ für $0 < |x - x_0| < \delta$. Dann ist aber $f'(x) > 0$ für $x \in]x_0,\ x_0+\delta[$ und $f'(x) < 0$ für $x \in]x_0-\delta,\ x_0[$. Nach Satz 15.6(b) ist $f|_{[x_0-\delta,x_0]}$ streng monoton fallend und $f|_{[x_0,x_0+\delta]}$ streng monoton wachsend. Also ist $f(x) > f(x_0)$ für jedes $x \in]x_0-\delta,\ x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$. $\square$

Satz 15.8 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) stetig und seien die Einschränkungen $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar so, dass $g'(x) \neq 0$ ist für alle $x \in]a,b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $t \in]a,b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Beweis. Der Satz von Rolle (Satz 15.3) angewendet auf die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

liefert ein $t \in]a,b[$ mit $h'(t) = 0$ oder äquivalent mit

$$(f(b) - f(a))g'(t) = f'(t)(g(b) - g(a)).$$

Da ebenfalls nach dem Satz von Rolle notwendigerweise $g(b) \neq g(a)$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Mit dem zweiten Mittelwertsatz kann man unter geeigneten Bedingungen eine Quotientenregel für die Existenz von Grenzwerten beweisen für den Fall, dass die Funktionen in Zähler und Nenner beide den Grenzwert 0 in der betrachteten Stelle besitzen.

Korollar 15.9 (l' Hospital)**.** *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) = g(a) = 0$*, und seien* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in]a, b[$*. Existiert der Grenzwert* $l = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, so ist auch*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Entsprechende Aussagen gelten für den einseitigen Limes $\lim_{x \uparrow b}$ *und den zweiseitigen Limes* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}$ *in Punkten* $x_0 \in]a, b[$.

Beweis. Nach dem Satz von Rolle (Satz 15.3) ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Der 2. Mittelwertsatz (Satz 15.8) angewendet auf $f, g : [a, x] \to \mathbb{R}$ garantiert für jedes $x \in]a, b]$ die Existenz einer Zahl $t_x \in]a, x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} \xrightarrow{x \downarrow a} l.$$

Die übrigen Fälle kann man ganz genauso beweisen. $\square$

In Korollar 15.9 genügt es natürlich, dass die Bedingung $g'(x) \neq 0$ auf irgendeinem Intervall der Form $]a, c[$ $(a < c < b)$ erfüllt ist.

Beispiel 15.10. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$ und jedes $a > 0$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\alpha \ x^{\alpha - 1}}{\beta \ x^{\beta - 1}} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha - \beta}.$$

Es genügt, Korollar 15.9 anzuwenden auf die Funktionen $f, g : [\frac{a}{2}, 2a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - a^\alpha$ und $g(x) = x^\beta - a^\beta$.

16 Das Riemann-Integral

Im Folgenden wollen wir die Größe von Flächen zwischen dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse berechnen. Die entscheidende Idee dabei besteht darin, diese Flächen zu approximieren durch die entsprechend gebildeten Flächen für geeignete stückweise konstante Funktionen.

Definition 16.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine *Teilung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Folge $T = (t_i)_{i=0}^n$ in $\mathbb{R}$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Ist $S = (s_i)_{i=0}^m$ eine weitere Teilung von $[a, b]$, so heißt S *feiner* als T (geschrieben als $S \geq T$), falls

$$\{t_j;\ j = 0, \ldots, n\} \subset \{s_i;\ i = 0, \ldots, m\}.$$

In der obigen Situation ist $S = (s_i)_{i=0}^m$ feiner als $T = (t_j)_{j=0}^n$ genau dann, wenn es Indizes $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_n = m$ gibt so, dass $t_j = s_{i_j}$ für $j = 0, \ldots, n$ ist.

Bemerkung 16.2. Seien $T = (t_i)_{i=0}^n$ und $T' = (t'_i)_{i=0}^{n'}$ Teilungen von $[a, b]$. Dann besitzen T und T' eine gemeinsame Verfeinerung, etwa die Folge $S = (s_i)_{i=0}^m$ mit $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$ und

$$\{s_0, \ldots, s_m\} = \{t_0, \ldots, t_n\} \cup \{t'_0, \ldots, t'_{n'}\}.$$

Definition 16.3. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ von $[a, b]$ gibt so, dass $\varphi|_{]t_{i-1}, t_i[}$ konstant ist für jedes $i = 1, \ldots, n$. In diesem Fall nennt man φ *Treppenfunktion bezüglich* T.

Bemerkung 16.4. (a) Ist φ Treppenfunktion bezüglich der Teilung T und ist S eine feinere Teilung von $[a, b]$, so ist φ auch Treppenfunktion bezüglich S.

(b) Die Menge

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}([a, b]) = \{\varphi :\ [a, b] \to \mathbb{R};\ \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich den punktweise gebildeten Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t),\ (\alpha\varphi)(t) = \alpha\varphi(t) \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{T},\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Zum Beweis genügt es zu begründen, dass $\mathcal{T}$ ein Teilvektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller $\mathbb{R}$-wertigen Abbildungen auf $[a, b]$ ist. Dies ist aber offensichtlich so, denn sind φ, ψ Treppenfunktionen bezüglich der Teilungen T, T' und ist S eine gemeinsame Verfeinerung von T und T', so sind $\varphi + \psi$ und $\alpha\varphi$ Treppenfunktionen bezüglich S.

(c) Ist $\varphi \in \mathcal{T}$ Treppenfunktion sowohl bezüglich der Teilung $T = (t_j)_{j=0}^n$ als auch bezüglich der Teilung $S = (s_i)_{i=0}^m$ mit

$$\varphi|_{]t_{j-1}, t_j[} \equiv c_j\ (j = 1, \ldots, n),\ \varphi|_{]s_{i-1}, s_i[} \equiv d_i\ (i = 1, \ldots, m),$$

so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\ (t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{m} d_i\ (s_i - s_{i-1}).$$

Zum Beweis darf man annehmen, dass $S \geq T$ ist. Sonst vergleiche man beide Summen mit der für eine gemeinsame Verfeinerung gebildeten Summe. Sei also $t_j = s_{i_j}$ für $j = 0, \ldots, n$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\ (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} (s_k - s_{k-1}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} d_k\ (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} d_k\ (s_k - s_{k-1}).$$

Definition 16.5. Für $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ definiert man das Integral von φ über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b \varphi dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}),$$

falls φ Treppenfunktion bezüglich der Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ von $[a,b]$ ist und $\varphi|_{]t_{i-1}t_i[} \equiv c_i$ ist für jedes $i = 1, \ldots, n$.

Man beachte, dass diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl der Teilung T denselben Wert des Integrals von φ über $[a,b]$ ergibt. Dies ist gerade die Aussage von Bemerkung 16.4(c).

Lemma 16.6. *Die Abbildung*

$$\mathcal{T}([a,b]) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \int_a^b \varphi dx$$

ist $\mathbb{R}$*-linear. Für* $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ *mit* $\varphi \leq \psi$ *(das heißt* $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$*) ist*

$$\int_a^b \varphi\ dx \leq \int_a^b \psi\ dx \quad \text{(Monotonie des Riemann-Integrals).}$$

Beweis. Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ Treppenfunktionen und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Nach den Bemerkungen 16.6 und 16.4(a) gibt es eine Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ von $[a,b]$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n,\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi|_{]t_{i-1},t_i[} \equiv c_i$ und $\psi|_{]t_{i-1},t_i[} \equiv d_i$ ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann sind $\varphi + \psi$ und $\alpha\varphi$ Treppenfunktionen bezüglich T mit den konstanten Werten $c_i + d_i$ und αc_i auf $]t_{i-1}, t_i[$. Definitiongemäß gilt

$$\int_a^b (\varphi + \psi) dx = \sum_{i-1}^{n} (c_i + d_i)\ \ (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_1\ (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i-1}^{n} d_i\ (t_i - t_{i=1}) = \int_a^b \varphi\ dx + \int_a^b \psi\ dx$$

und

$$\int_a^b \alpha\varphi\ dx = \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i)\ (t_i - t_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i\ (t_i - t_{i-1}) = \alpha \int_a^b \varphi\ dx.$$

Ist $\varphi \leq \psi$, so gilt $c_i \leq d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und daher ist

$$\int_a^b \varphi\ dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\ (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i\ (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \psi\ dx,$$

wie behauptet. □

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so gibt es Treppenfunktionen φ, ψ und $[a,b]$ mit $\varphi \le f \le \psi$. Da für jedes solche Paar von Treppenfunktionen φ und ψ das Integral von φ kleiner oder gleich dem Integral von ψ ist, ist das Integral jeder Treppenfunktion $\psi \ge f$ größer oder gleich dem Supremum der Intergrale über alle Treppenfunktionen $\varphi \le f$. Nach Definition des Infimums ist daher das Infimum der Integrale über alle Treppenfunktionen $\psi \ge f$ größer oder gleich dem Supremum über die Integrale aller Treppenfunktionen $\varphi \le f$.

Definition 16.7. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(a) Man nennt

$$\int_a^{b_*} f dx = \inf \left\{ \int_a^b \psi dx; \ \psi \in \mathcal{T}([a,b]) \text{ mit } \psi \ge f \right\}$$

das *Oberintegral* von f und

$$\int_{a_*}^b f dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi dx; \ \varphi \in \mathcal{T}([a,b]) \text{ mit } \varphi \le f \right\}$$

das *Unterintegral* von f.

(b) Die Funktion f heißt (*Riemann-*) *integrierbar*, falls

$$\int_a^{b_*} f dx = \int_{a_*}^b f dx.$$

In diesem Fall definiert man das (*Riemann-*) *Integral* $\int_a^b f dx$ als den gemeinsamen Wert des Ober- und Unterintegrals von f. Wir schreiben

$$\mathrm{RI}([a,b]) = \{f; \ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist Riemann-integrierbar}\}$$

für die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

Bemerkung 16.8. (a) Aus der in Lemma 16.6 bewiesenen Monotonie des Riemann-Integrals auf der Menge der Treppenfunktionen folgt, dass jede Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ integrierbar im Sinne von Definition 16.7 ist und dass die neue Definition des Integrals auf $\mathcal{T}([a,b])$ mit der aus Definition 16.5 übereinstimmt.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir haben vor Definition 16.7 begründet, dass

$$\int_{a_*}^b f dx \le \int_a^{b_*} f dx$$

ist. Da der Abstand dieser beiden Zahlen kleiner oder gleich $\int_a^b (\psi - \varphi) dx$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\varphi \le f \le \psi$ ist und da man das Supremum bzw. Infimum einer nach oben bzw. unten beschränkten Menge beliebig gut von unten bzw. oben durch Elemente der Menge approximieren kann, folgt sofort, dass f Riemann-integrierbar ist genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ existieren mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b (\psi - \varphi)dx < \epsilon$.

(c) Ist $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ Treppenfunktion bezüglich einer Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ und ändert man den Wert von φ in den Punkten einer endlichen Menge $M \subset [a,b]$ ab, so ist die neue Funktion $\tilde{\varphi}$ Treppenfunktion auf $[a,b]$ bezüglich der Teilung $\tilde{T}$, die man erhält, indem man alle Punkte aus M, die nicht zu der Menge $\{t_i; i = 0,\dots,n\}$ gehören, in die Teilung T einfügt. Dieses Argument zeigt, dass sich der Wert des Integrals von φ beim Abändern von φ in endlich vielen Punkten nicht ändert. Als Folgerung erhält man, dass für zwei Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, die sich höchstens in endlichen vielen Punkten aus $[a,b]$ unterscheiden, die Riemann-Integrierbarkeit beider Funktionen äquivalent ist und die Integrale im Falle der Integrierbarkeit übereinstimmen.

Das folgende Resultat zeigt, dass wichtige Klassen von Funktionen Riemann-integrierbar sind.

Satz 16.9. *(a) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

(b) Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. (a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\epsilon > 0$. Dann ist f nach Satz 10.4 beschränkt und nach Satz 10.9 gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a)$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta$. Wir wählen eine Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ von $[a,b]$ mit $\max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) < \delta$ und definieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ durch (siehe Satz 10.4)

$$\varphi|_{[t_{i-1},t_i[} \equiv \min f([t_{i-1}t_i]),\ \psi|_{[t_{i-1},t_i[} \equiv \max f([t_{i-1},t_i])$$

für $i = 1,\dots,n$ sowie $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann ist $\varphi \le f \le \psi$ auf $[a,b]$ und die Integrierbarkeit von f folgt mit Bemerkung 16.8(b) aus

$$\int_a^b (\psi - \varphi)dx = \sum_{i=1}^n (\max f([t_{i-1},t_i]) - \min f([t_{i-1},t_i]))\ (t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}\ (t_i - t_{i-1}) = \epsilon.$$

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $T = (t_i)_{i=0}^n = (a + i\frac{b-a}{n})_{i=0}^n$. Dann sind die durch $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$ und

$$\varphi|_{[t_{i-1},t_i[} \equiv f(t_{i-1}),\ \psi|_{[t_{i-1},t_i[} \equiv f(t_i) \quad (1 \le i \le n)$$

definierten Funktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi)dx = \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-n}))\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wieder folgt aus Bemerkung 16.8(b) die Integrierbarkeit von f. Analog folgt die Integrierbarkeit monoton fallender Funktionen auf $[a,b]$. $\square$

Als nächstes wollen wir ein Kriterium für die Integrierbarkeit von Funktionen $f : [a,b] \to$ herleiten, das ohne Unter- und Oberintegral und ohne die Existenz einer Anordnung auf dem Bildbereich $\mathbb{R}$ auskommt.

Definition 16.10. Sei $T = (t_i)_{i=0}^n$ eine Teilung von $[a, b]$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Eine *Zwischenfolge* von T ist eine Folge $Z = (z_i)_{i=1}^n$ mit $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Sei $Z = (z_i)_{i=1}^n$ eine Zwischenfolge von T. Dann heißt die Zahl

$$S(f, T, Z) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\ (t_i - t_{i-1})$$

die *Riemann-Summe* von f bezüglich (T, Z).

(iii) Man nennt die Zahl $\omega(T) = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$ die *Spurweite* oder *Feinheit* der Teilung T.

Satz 16.11. *Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

(i) f ist Riemann-integrierbar über $[a, b]$.

(ii) Für jede Folge $(T_n)_{n \ge 0}$ von Teilungen von $[a, b]$ mit $(\omega(T_n)) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$ und jede Wahl von Zwischenfolgen Z_n von T_n existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S(f, T_n, Z_n) \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte in (ii) gleich dem Integral $\int_a^b f dx$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei f Riemann-integrierbar und sei $\epsilon > 0$. Wir definieren

$$I = \int_a^b f dx \text{ und } M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Wir dürfen natürlich annehmen, dass $f \not\equiv 0$ oder äquivalent $M > 0$ ist. Nach Bemerkung 16.8(b) gibt es eine Teilung $S = (s_j)_{j=1}^m$ von $[a, b]$ und Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$ bezüglich S mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi) dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir definieren $\delta = \epsilon/8mM$. Sei $T = (x_i)_{i=1}^n$ eine Teilung von $[a, b]$ mit $\omega(T) < \delta$ und $Z = (z_i)_{i=1}^n$ eine beliebige Zwischenfolge von T. Es genügt zu zeigen, dass $|I - S(f, T, Z)| < \epsilon$ ist. Denn dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(f, T_n, Z_n) = I$$

für alle Folgen $(T_n)_{n\ge0}$ und $(Z_n)_{n\ge0}$ wie in (ii).
Wir definieren I als die Menge aller Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$, für die das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ keinen Punkt aus $\{s_j;\ j = 0, \ldots, m\}$ enthält und setzen $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Dann ist die durch $F(b) = f(b)$ und

$$F|[x_{i-1}, x_i[\equiv f(z_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

definierte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $-M \le F \le M$ und $\int_a^b F dx = S(f, T, Z)$. Ist $i \in I$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $[x_{i-1}, x_i] \subset]s_{j-1}, s_j[$. Insbesondere ist $\varphi \le F \le \psi$ auf $[x_{i-1}, x_i[$

für jedes $i \in I$. Da die Punkte s_0 und s_m in genau einem der Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ liegen und da jeder der Punkte $s_1, \ldots, s_{m-1}$ in höchstens zwei der Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ liegt, enthält J höchstens $2+2(m-1) = 2m$ der Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir setzen

$$A = \bigcup_{i \in I}]x_{i-1}, x_i[$$

und definieren eine Treppenfunktion $\tau \in \mathcal{T}([a,b])$ durch

$$\tau(x) = 0 \text{ für } x \in A,\ \tau(x) = 2M \text{ für } x \notin A.$$

Für $x \in A$ ist $\varphi(x) \leq F(x) \leq \psi(x)$. Für $x \in [a,b] \setminus A$ gilt

$$\varphi(x) - 2M \leq M - 2M = -M \leq F \leq M = -M + 2M \leq \psi(x) + 2M.$$

Also gelten für jedes $x \in [a,b]$ die Ungleichungen $\varphi(x) - \tau(x) \leq F(x) \leq \psi(x) + \tau(x)$. Wegen

$$0 \leq \int_a^b \tau dx = 2M \sum_{i \in J} (x_i - x_{i-1}) \leq (2M)(2m)\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

erhält man schließlich die gewünschten Abschätzungen für $S(f,T,Z)$

$$I - \epsilon < \int_a^b \varphi\ dx - \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b (\varphi - \tau) dx \leq S(f,T,Z) \leq \int_a^b (\varphi + \tau) dx \leq \int_a^b \psi\ dx + \frac{\epsilon}{2} < I + \epsilon.$$

Damit ist die Gültigkeit der Implikation (i)$\Rightarrow$ (ii) gezeigt. Mitgezeigt wurde, dass alle in (ii) auftretenden Grenzwerte gleich dem Integral von f sind.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wir setzen voraus, dass f die Bedingung aus (ii) erfüllt. Dann sind alle in (ii) auftretenden Grenzwerte gleich. Denn gäbe es Folgen (T_n, Z_n) und (T'_n, Z'_n) wie in (ii), für die die Folgen der zugehörigen Riemann-Summen unterschiedliche Grenzwerte hätten, so würde die Folge

$$(S(f, T_0, Z_0),\ S(f, T'_0, Z'_0),\ S(f, T_1, Z_1),\ S(f, T'_1, Z'_1), \ldots)$$

nicht konvergieren im Widerspruch zur Gültigkeit von (ii). Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $T_n = (t_i^n)_{i=0}^n = (a + i\frac{b-a}{n})_{i=0}^n$. Wir setzen $\alpha_i^n = \inf f(]t_{i-1}^n, t_i^n[)$ und $\beta_i^n = \sup f(]t_{i-1}^n,\ t_i^n[)$ und wählen für $n \in \mathbb{N}^*$ und $i = 1, \ldots, n$ Punkte $z_i^n,\ w_i^n \in]t_{i-1}^n,\ t_i^n[$ mit

$$f(z_i^n) < \alpha_i^n + \frac{1}{n},\ f(w_i^n) > \beta_i^n - \frac{1}{n}.$$

Dann sind $Z_n = (z_i^n)_{i=1}^n$ und $W_n = (w_i^n)_{i=1}^n$ Zwischenfolgen von T_n. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} \int_a^{b_*} f\ dx - \int_{a_*}^b f\ dx \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^n\ (t_i^n - t_{i-1}^n) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^n (t_i^n - t_{i-1}^n) \\ &\leq \quad S(f, T_n, W_n) - S(f, T_n, Z_n) + \frac{2}{n}(b-a) \stackrel{(n \to \infty)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also stimmen das Ober- und Unterintegral von f überein und f ist definitionsgemäß Rieman-integrierbar.

$\square$

Als Anwendung des gerade bewiesenen Satzes folgt auch, dass Lemma 16.6 richtig bleibt, wenn man die Menge $\mathcal{T}([a,b])$ der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ersetzt durch die Menge $\mathrm{RI}([a,b])$ aller Riemann-integrierbaren Funktionen über $[a,b]$.

Satz 16.12. *Die Menge* $\mathrm{RI}([a,b])$ *der Rieman-integrierbaren Funktionen bildet einen* $\mathbb{R}$*-Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation. Für das Integral gilt:*

(a) Die Abbildung

$$\mathrm{RI}([a,b]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f\ dx$$

ist $\mathbb{R}$*-linear.*

(b) Für $f,g \in \mathrm{RI}([a,b])$ *mit* $f \le g$ *auf* $[a,b]$ *ist* (Monotonie des Integrals)

$$\int_a^b f\ dx \le \int_a^b g\ dx.$$

Beweis. Seien $f,g \in \mathrm{RI}([a,b])$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Nach Satz 16.11 gilt für jede Folge $(T_n)_{n\ge 0}$ von Teilungen von $[a,b]$ mit $(\omega(T_n)) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$ und jede Wahl von Zwischenfolgen Z_n von T_n

$$\begin{aligned} S(f+g,T_n,Z_n) &= S(f,T_n,Z_n)+S(g,T_n,Z_n) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \int_a^b f\ dx + \int_a^b g\ dx, \\ S(\alpha f,T_n,Z_n) &= \alpha S(f,T_n,Z_n) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \alpha \int_a^b f\ dx. \end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Implikation aus Satz 16.11 folgt, dass $f+g$ und αf Riemann-integrierbar sind und dass

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f\ dx + \int_a^b g\ dx,\quad \int_a^b (\alpha f)dx = \alpha \int_a^b f\ dx$$

ist. Also ist $\mathrm{RI}([a,b])$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und das Riemann-Integral definiert, wie in Teil (a) behauptet, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf $\mathrm{RI}([a,b])$. Ist $f \le g$ auf $[a,b]$, so gilt

$$S(f,T_n,Z_n) \le S(g,T,Z_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach Satz 4.10 übertragen sich diese Ungleichungen auf die Grenzwerte dieser Folgen. □

Wir wollen zeigen, dass die Menge $\mathrm{RI}([a,b])$ stabil ist gegenüber dem Bilden von Maxima, Minima, des Absolutbetrages und einiger weiterer Operationen. Dazu benötigen wir die folgenden Definitionen. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer beliebigen Menge D definieren wir

$$\begin{aligned} \|f\|_D &= \sup\{|f(t)|;\ t \in D\}\ (\in \mathbb{R}\cup\{\infty\}), \\ f^+ : D &\to \mathbb{R},\ f^+(t) = \max(f(t),0), \\ f^- : D &\to \mathbb{R},\ f^-(t) = \max(-f(t),0). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$ und $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$ für alle $t \in D$.

Satz 16.13. *Für Riemann-integrierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $p \in [1,\infty)$ gilt:*

(a) $f^+, f^- \in \mathrm{RI}([a,b])$,

(b) $|f| \in \mathrm{RI}([a,b])$ *und* $|\int_a^b f\ dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq \|f\|_{[a,b]}(b-a)$,

(c) $\max(f,g),\ \min(f,g) \in \mathrm{RI}([a,b])$,

(d) $|f|^p \in \mathrm{RI}([a,b])$,

(e) $fg \in \mathrm{RI}([a,b])$.

Beweis. (a) Sei $f \in \mathrm{RI}([a,b])$. Nach Bemerkung 16.8(b) gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi) dx < \epsilon.$$

Dann sind φ^+ und ψ^+ Treppenfunktionen über $[a,b]$ mit $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$. Wegen $\psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$ ist auch

$$\int_a^b (\psi^+ - \varphi^+) dx \leq \int_a^b (\psi - \varphi) dx < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist φ^+ nach Bemerkung 16.8(b) integrierbar. Indem man f durch $-f$ ersetzt, sieht man, dass auch $f^- = (-f)^+ \in \mathrm{RI}([a,b])$ gilt.

(b) Als Anwendung von Teil (a) und Satz 16.12 erhält man, dass mit f auch $|f| = f^+ + f^-$ Riemann-integrierbar ist. Seien T_n ($n \in \mathbb{N}$) Teilungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \omega(T_n) = 0$ und sei Z_n eine Zwischenfolge von T_n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 16.11, der Dreiecksungleichung und Satz 4.10 folgt, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f\ dx \right| &= |\lim_{n\to\infty} S(f, T_n, Z_n)| = \lim_{n\to\infty} |S(f, T_n, Z_n)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} S(|f|, T_n, Z_n) = \int_a^b |f| dx \leq \int_a^b \|f\|_{[a,b]} dx = \|f\|_{[a,b]}(b-a). \end{aligned}$$

(c) Mit f, g sind nach Teil (b) und Satz 16.12 auch die Funktionen

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|),\ \min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$$

Riemann-integrierbar.

(d) Sei $f \in \mathrm{RI}([a,b])$ und sei $1 \leq p < \infty$. Wir wollen zeigen, dass $|f|^p \in \mathrm{RI}([a,b])$ ist. Wir dürfen annehmen, dass $0 \leq f \leq 1$ ist. Sonst ersetze man f durch $|f|/(\|f\|_{[a,b]} + 1)$. Sei $\epsilon > 0$. Da mit zwei Treppenfunktionen auch ihr Maximum und Minimum Treppenfunktionen sind, gibt es $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$ und $\int_a^b (\psi - \varphi) dx < \epsilon$. Dann sind φ^p und ψ^p Treppenfunktionen mit $\varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$. Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4) angewendet auf die Funktion

$$[0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^p$$

zeigt, dass für $0 \leq x < y \leq 1$ eine reelle Zahl $t \in]x, y[$ existiert mit

$$\frac{y^p - x^p}{y - x} = pt^{p-1} \leq p.$$

Mit der Monotonie des Riemann-Integrals erhält man

$$\int_a^b (\psi^p - \varphi^p) dx \leq p \int_a^b (\psi - \varphi) dx < p\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt mit Bemerkung 16.8(b) die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|^p$.
(e) Mit f, g ist nach Teil (d) und Satz 16.12 auch $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ Riemann-integrierbar. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir, dass für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stelle $t \in \mathbb{R}$ existiert so, dass die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse gleich der Fläche des Rechteckes mit Höhe $f(t)$ und Länge $b - a$ ist.

Satz 16.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $t \in [a, b]$ mit $\int_a^b f \; dx = f(t) \; (b - a)$.*

Beweis. Nach Satz 10.4 existieren $m = \min f([a, b])$ und $M = \max f([a, b])$. Wegen der Monotonie des Riemann-Integrals (Satz 16.12) ist

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \; dx \leq M(b - a).$$

Der Zwischenwertsatz (Satz 10.1) impliziert die Existenz einer Zahl $t \in [a, b]$ mit $f(t) = \frac{\int_a^b f \; dx}{(b-a)}$. □

17 Differential- und Integralrechnung

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t^2$ ist stetig und damit nach Satz 16.9 Riemann-integrierbar über jedem Intervall $[0, x]$ mit $x > 0$. Mit Satz 16.11 angewendet auf die äquidistanten Teilungen $T_n = (i\frac{x}{n})_{i=0}^n$ erhält man, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^x f\ dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f\left(i\frac{x}{n}\right)\left(i\frac{x}{n} - (i-1)\frac{x}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

für alle $x > 0$ gilt. Dabei folgt die benutzte Summenformel durch eine einfache Induktion nach n. Insbesondere gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 = f(x)$$

für alle $x > 0$. Wir zeigen als nächstes, dass dies kein Zufall ist.

Lemma 17.1. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar genau dann, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ beide Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $\epsilon > 0$. Nach Bemerkung 16.8(b) gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b (\psi - \varphi)dx < \epsilon$. Indem man das Integral von $\psi - \varphi$ mit Hilfe einer Teilung berechnet (Definition 16.5), die den Punkt c enthält, sieht man, dass auch

$$\int_a^c (\psi - \varphi)dx < \epsilon \text{ und } \int_c^b (\psi - \varphi)dx < \epsilon$$

gilt. Wieder mit Bemerkung 16.8(b) folgt die Riemann-Integrierbarkeit der Einschränkungen von f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$.

Seien umgekehrt diese Einschränkungen beide Riemann-integrierbar. Dann ist die Funktion $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1|_{[a,c]} = f|_{[a,c]},\ f_1|_{]c,b]} \equiv 0$$

Riemann-integrierbar und $\int_a^b f_1\ dx = \int_a^c f\ dx$. Zum Beweis beachte man, dass die letzte Identität offensichtlich gilt, wenn f eine Treppenfunktion über $[a, b]$ ist, und benutze dann Bemerkung 16.8(b), um zu schließen, dass

$$\int_a^c f\ dx = \int_{a_*}^c f\ dx \le \int_{a_*}^b f_1\ dx \le \int_a^{b_*} f_1\ dx \le \int_a^{c_*} f\ dx = \int_a^c f\ dx$$

gilt. Genauso folgt, dass die Funktion $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_2|_{[a,c[} \equiv 0,\ f_2|_{[c,b]} = f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar ist mit $\int_a^b f_2\ dx = \int_c^b f\ dx$. Mit Satz 16.12 und Bemerkung 16.8(c) sieht man, dass $f_1 + f_2$

und damit auch f Riemann-integrierbar sind auf $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^b (f_1 + f_2) dx = \int_a^b f_1\ dx + \int_a^b f_2\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$

Damit sind alle Teile von Lemma 17.1 bewiesen. □

Definition 17.2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [\min(a, b),\ \max(a, b)] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wir definieren

$$\int_a^b f\ dx = 0 \text{ für } a = b$$

und setzen

$$\int_a^b f\ dx = -\int_b^a f\ dx,$$

falls $b < a$ ist und $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Bemerkung 17.3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und sei

$$f : [\min(a, b, c),\ \max(a, b, c)] \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Ist f Riemann-integrierbar oder ist $a = b = c$, so gilt

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$

Mit Definition 17.2 und endlich vielen Fallunterscheidungen folgt dies sehr leicht aus Lemma 17.1.

Im Folgenden seien I, J immer beliebige Intervalle mit mindestens zwei verschiedenen Punkten. Dabei dürfen I, J offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt sein.

Satz 17.4. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $a \in I$ ein fester Punkt. Dann ist die Funktion*

$$F : I \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

differenzierbar auf I mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis. Seien $x \in I,\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, dass auch $x + h \in I$ gilt. Dann folgt mit Bemerkung 17.3 und Satz 16.13(b), dass

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x) dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{\min(x,x+h)}^{\max(x,x+h)} |f(t) - f(x)|\, dt$$
$$\leq \sup\{|f(t) - f(x)|;\ \min(x, x+h) \leq t \leq \max(x, x+h)\}$$

gilt. Da f nach Voraussetzung stetig in x ist, konvergiert das im letzten Schritt gebildete Supremum gegen 0 für $h \to 0$. Also ist F differenzierbar in x mit $F'(x) = f(x)$. □

Definition 17.5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* für f, falls $F' = f$ auf ganz I gilt.

Bemerkung 17.6. *Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen zu f, so ist $F - G$ konstant auf I. Zum Beweis fixiere man einen beliebigen Punkt $a \in I$ und beachte, dass wegen*

$$(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ für alle } x \in I$$

die Funktion $F - G$ auf ganz I den Wert $(F - G)(a)$ hat (Korollar 15.5).

Satz 17.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f. Dann gilt für beliebige Zahlen $a, b \in I$*

$$\int_a^b f \; dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei $a \in I$ beliebig. Nach Satz 17.4 definiert

$$F_0 : I \to \mathbb{R}, \; F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion für f. Nach Bemerkung 17.6 gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - F_0 \equiv c$ auf I. Dann gilt

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt$$

für alle $b \in I$. □

Definition 17.8. (a) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so schreibt man für beliebige $a, b \in I$

$$F|_a^b = F(b) - F(a).$$

(b) Sind $f, F : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf einer Menge $\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\int f \; dx = F(x) \quad (x \in D),$$

falls $F|_J$ Stammfunktion zu $f|_J$ für jedes abgeschlossene endliche Intervall $J \subset D$ positiver Länge ist.

Beispiele 17.9. Im Sinne der Definition 17.8(b) gilt:

(a) für $n \in \mathbb{N} : \int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$ (14.3(b)),

(b) für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} : \int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (14.3(b) und (c)),

(c) $\int \frac{1}{x} \; dx = \log |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (14.3(e) und Kettenregel),

(d) für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \int x^\alpha \; dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (x > 0)$ (14.11),

(e) $\int e^x \; dx = e^x \; (x \in \mathbb{R})$ (14.3(d)),

(f) für $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} : \int a^x \; dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (x \in \mathbb{R})$ (14.11),

(g) $\int \cos x\ dx = \sin x,\ \int \sin x\ dx = -\cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad$ (14.3(g) und (h)),

(h) mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \int \tan x\ dx &= -\log|\cos x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\}) \\ \int \cot\ dx &= \log|\sin x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x \quad (|x| < 1) \quad$ (14.13),

(j) $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad$ (14.13),

(k) $\int \log x\ dx = x \log x - x \quad (x > 0) \quad$ (Produktregel),

(l) $\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x) \quad$ (Produktregel),

(m) $\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) \quad$ (Produktregel).

Satz 17.10 (Substitution)**.** *Seien wie zuvor $I, J \subset \mathbb{R}$ beliebige Intervalle, die beide mindestens zwei verschiedene Punkte enthalten. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und ist $\varphi : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(J) \subset I$, so gilt für beliebige $a, b \in J$*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Beweis. Nach Satz 17.4 hat f eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$. Die Kettelregel (Satz 14.10) zeigt, dass $F \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$ Stammfunktion zu $(f \circ \varphi)\varphi' : J \to \mathbb{R}$ ist. Mit dem Hauptsatz (Satz 17.7) folgt, dass

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F \circ \varphi\big|_a^b \equiv F\big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_a^b f(x)dx$$

für beliebige Punkte $a, b \in J$ gilt. □

Bemerkung: (a) Etwas suggestiver kann man die Substitutionsformel aus Satz 17.10 schreiben als

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}dt.$$

Man substituiere x durch $\varphi(t)$ und "erweitere mit dt".
(b) Setzt man in Satz 17.10 zusätzlich voraus, dass $\varphi : J \to I$ bijektiv ist, so gilt

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}dt$$

für alle $c, d \in I$.

Beispiele 17.11. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a, b, c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Substitutionsregel angewendet mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = t + c$ zeigt, dass

$$\int_{a+c}^{b+c} F(x)dx = \int_a^b F(t+c)\frac{d(t+c)}{dt}dt = \int_a^b F(t+c)dt.$$

(b) Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = ct$

$$\int_{ca}^{cb} F(x)dx = \int_a^b F(ct)\frac{d(ct)}{dt}dt = c\int_a^b F(ct)dt.$$

(c) Mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = t^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ erhält man

$$\int_a^b t^n F(t^{n+1})dt = \frac{1}{n+1}\int_a^b F(t^{n+1})\frac{dt^{n+1}}{dt}dt = \frac{1}{n+1}\int_{a^{n+1}}^{b^{n+1}} F(x)dx.$$

(d) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall wie in Satz 17.10 und $\varphi : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Dann gilt für alle $a, b \in J$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \log|\varphi| \Big|_a^b.$$

Zur Begründung beachte man, dass nach dem Zwischenwertsatz (Satz 10.1) entweder $\varphi(J) \subset (0, \infty)$ oder $\varphi(J) \subset (-\infty, 0)$ ist. Im ersten Fall sei $I = (0, \infty)$, im zweiten Fall setzen wir $I = (-\infty, 0)$. Mit der Substitutionsregel (Satz 17.10) folgt für $f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \log|x| \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \log|\varphi|\Big|_a^b.$$

Wählt man etwa für φ die Funktion $\varphi : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \sin t$, so erhält man als konkretes Beispiel für $a, b \in (0, \pi)$

$$\int_a^b \cot t\ dt = \int_a^b \frac{\cos t}{\sin t}dt = \log|\sin t| \Big|_a^b = \log(\sin t)\Big|_a^b.$$

(e) (*Partialbruchzerlegung*) Seien $r, s, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq \beta$. Wir wollen für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \notin [a, b]$ das Integral

$$I = \int_a^b \frac{rx + s}{(x - \alpha)(x - \beta)}dx$$

berechnen. Dazu zeigen wir zunächst, dass reelle Zahlen A, B existieren mit

$$\frac{rx + s}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Offensichtlich ist die Gültigkeit dieser Darstellung äquivalent zu

$$(A + B)x - (\alpha B + \beta A) = rx + s \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Indem man beide Seiten nach x ableitet, sieht man, dass diese Identität äquivalent ist zur Gültigkeit des Gleichungssystems

$$A + B = r \text{ und } \alpha B + \beta A = -s$$

oder zu

$$B = r - A \text{ und } \alpha(r - A) + \beta A = -s.$$

Also sind die eindeutigen Lösungen unseres Problems gegeben durch

$$A = \frac{\alpha r + s}{\alpha - \beta} \text{ und } B = \frac{r(\alpha - \beta) - (\alpha r + s)}{\alpha - \beta} = \frac{\beta r + s}{\beta - \alpha}.$$

Als Anwendung von Teil (d) erhält man die Formel

$$I = A \int_a^b \frac{dx}{x - \alpha} + B \int_a^b \frac{dx}{x - \beta} = A \log|x - \alpha|\Big|_a^b + B \log|x - \beta|\Big|_a^b$$

mit A und B wie oben.

Als Spezialfall berechnen wir für $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma, -\gamma \notin [a, b] \cup \{0\}$ das Integral

$$I = \int_a^b \frac{dx}{x^2 - \gamma^2} = \int_a^b \frac{dx}{(x - \gamma)(x + \gamma)}.$$

Mit $r = 0,\ s = 1,\ \alpha = \gamma,\ \beta = -\gamma$ erhält man $A = \frac{1}{2\gamma},\ B = -\frac{1}{2\gamma}$ und

$$I = \frac{1}{2\gamma}(\log|x - \gamma| - \log|x + \gamma|)\Big|_a^b = \frac{1}{2\gamma} \log\left|\frac{x - \gamma}{x + \gamma}\right| \Big|_a^b.$$

(f) Wir wollen das Integral $I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} dx$ berechnen. Mit der Substitutionsregel (Satz 17.10) angewendet auf $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \cos t$ erhält man

$$\begin{aligned} I &= \int_{\cos\pi}^{\cos 0} f(x)dx = \int_\pi^0 f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t\ dt \\ &= \int_0^\pi \sin^2 t = \frac{t - \cos t \sin t}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, dass der Graph der Funktion f gegeben ist durch

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \geq 0\}.$$

Dies ist die obere Hälfte des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$. Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse entspricht daher der Hälfte der Fläche des Einheitskreises.

(g) Ist $a < b$ und ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so erhält man mit der Substitutionsregel (Satz 17.10) angewendet auf die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ die Formel

$$\int_a^b \varphi(t)^n \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} x^n\ dx = \frac{1}{n+1}(\varphi(b)^{n+1} - \varphi(a)^{n+1}).$$

Satz 17.12 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und seien $a, b \in I$ beliebig. Dann gilt*

$$\int_a^b fg'\ dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g\ dx.$$

Beweis. Wegen $(fg)' = f'g + fg'$ erhält man mit dem Hauptsatz (Satz 17.7)

$$\int_a^b fg'\ dx + \int_a^b f'g\ dx = \int_a^b (fg)'dx = (fg)\Big|_a^b.$$

Dies ist genau die Behauptung. □

Beispiele 17.13. (a) Mit $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \log x$, $g(x) = x$ erhält man für $0 < a < b$

$$\int_a^b \log x \; dx = \int_a^b (\log x) \left(\frac{d}{dx} x\right) dx = (x \log x)\big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \log x\right) x \; dx = x(\log x - 1)\big|_a^b.$$

Insbesondere gilt im Sinne von Definition 17.8(b)

$$\int \log x \; dx = x(\log x - 1) \quad (x > 0).$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\ x$, $g(x) = x$ erhält man mit Satz 17.12 und den Beispielen 14.13(b) sowie 17.11(d)

$$\int_a^b \arctan\ x \, dx = \int_a^b \arctan\ x \left(\frac{d}{dx} x\right) dx = x \arctan\ x\big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x}{1 + x^2} dx = (x \arctan\ x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2))\big|_a^b.$$

Insbesondere ist $\int \arctan\ dx = x \arctan\ x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Integrale

$$F(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx) dx.$$

Wir wollen zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|F(k)| < \epsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } |k| \geq k_0.$$

Abkürzend benutzen wir hierfür die Schreibweise

$$\lim_{|k| \to \infty} F(k) = 0.$$

Zum Beweis beachte man, dass man für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit partieller Integration (Satz 17.12) die Darstellung

$$F(k) = -f(x) \frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b + \int_a^b f'(x) \frac{\cos(kx)}{k} dx$$

erhält. Da $|f|$ und $|f'|$ stetig auf $[a, b]$ sind, gibt es eine reelle Zahl $M > 0$ mit $|f| \leq M$ und $|f'| \leq M$ auf $[a, b]$ (Satz 10.4). Die Abschätzung

$$|F(k)| \leq \frac{2M}{|k|} + \frac{1}{|k|} \int_a^b |f'| dx \leq \frac{2M + M(b - a)}{|k|}$$

impliziert, dass $\lim_{|k| \to \infty} |F(k)| = 0$ ist. Ganz ähnlich zeigt man, dass auch

$$\lim_{|k| \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = 0$$

gilt.

Satz 17.14. *Für $0 < x < 2\pi$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Insbesondere ist $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ gilt (siehe Lemma 13.2 und Korollar 13.10(c))

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-n}^{+n} e^{ikt} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-int}\sum_{k=0}^{2n}(e^{it})^k - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz (Satz 17.7) erhält man für $x \in]0, 2\pi[$ und $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kx)dx = \frac{1}{2}(A_n(x) - (x - \pi)),$$

wobei

$$A_n(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} dt = \int_{\pi}^{x} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \sin(nt)dt + \int_{\pi}^{x} \cos(nt)dt$$

nach Beispiel 17.13(c) gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2}(\pi - x)$$

für $0 < x < 2\pi$. Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt dies insbesondere

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

□

18 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten zunächst den Fall, dass eine Integrationsgrenze unendlich ist.

Beispiel 18.1. Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $R > 1$ ist

$$\int_1^R x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} x^{-s+1} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left(1 - \left(\frac{1}{R} \right)^{s-1} \right).$$

Also konvergieren diese Integrale für $R \to \infty$ gegen $\frac{1}{s-1}$, falls $s > 1$ ist, und sie konvergieren uneigentlich gegen ∞, falls $s < 1$ ist.

Definition 18.2. Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die integrierbar auf jedem Intervall $[a, R]$ $(a < R < \infty)$ ist. Falls der Grenzwert

$$L = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f \; dx \in \mathbb{R}$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f \; dx$ *konvergent* und man schreibt

$$\int_a^\infty f \; dx = L.$$

Nach Beispiel 18.1 ist für $s \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ konvergent genau dann, wenn $s > 1$ ist. Man beachte dabei, dass im nicht betrachteten Fall

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = \log R \overset{(R \to \infty)}{\longrightarrow} \infty$$

gilt.

Als zweites Beispiel betrachten wir Integrale, bei denen zwar die Integrationsgrenzen endlich sind, aber der Integrand kritisch an einer Grenze ist.

Beispiel 18.3. Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $0 < r < 1$ gilt

$$\int_r^1 x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} (1 - r^{1-s}).$$

Also konvergieren diese Integrale für $r \downarrow 0$ gegen $\frac{1}{1-s}$, falls $s < 1$ ist, und konvergieren uneigentlich gegen ∞, falls $s > 1$ ist.

Definition 18.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[r, b]$ $(a < r < b)$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$L = \lim_{r \downarrow a} \int_r^b f \; dx \in \mathbb{R}$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^b f \; dx$ *konvergent* und man schreibt

$$\int_a^b f \; dx = L.$$

Wenn in der Situation von Definition 18.4 die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sogar über ganz $[a, b]$ integrierbar ist, dann folgt aus der Abschätzung

$$\left| \int_a^r f \; dx \right| \le (r - a)\|f\|_{[a,r]} \le (r - a)\|f\|_{[a,b]} \xrightarrow{(r \downarrow a)} 0,$$

dass $\lim_{r\downarrow a} \left(\int_r^b f \; dx \right) = \lim_{r\downarrow a} \left(\int_a^b f \; dx - \int_a^r f \; dx \right) = \int_a^b f \; dx$ ist. In diesem Fall ist also das Integral $\int_a^b f \; dx$ im Sinne von Definition 18.4 konvergent und der im Sinne von Definition 18.4 gebildete Grenzwert ist einfach der Wert des Integrals im alten Sinne.

Nach Beispiel 18.3 ist für $s \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ konvergent genau dann, wenn $s < 1$ ist. Man beachte dabei, dass für $s = 1$ gilt

$$\int_r^1 \frac{1}{x} dx = -\log r \xrightarrow{(r \downarrow 0)} \infty.$$

Völlig analog zu Definition 18.2 (Definition 18.4) definiert man natürlich auch die Konvergenz von Integralen, die an der unteren (oberen) Grenze kritisch sind.

Als letztes Beispiel betrachten wir Integrale, die an beiden Grenzen kritisch sind.

Beispiele 18.5. (a) Für $0 < \epsilon < 1$ gilt (vgl. Beispiele 17.9 und Satz 13.13)

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\epsilon} = \arcsin(1 - \epsilon) \xrightarrow{(\epsilon \downarrow 0)} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-1+\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arcsin(-1 + \epsilon) \xrightarrow{(\epsilon \downarrow 0)} \frac{\pi}{2}.$$

(b) Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x \Big|_0^R = \arctan R,$$

$$\int_{-R}^0 \frac{1}{1 + x^2} dx = -\arctan(-R)$$

und aus Satz 13.13(c) folgt, dass beide Integrale für $R \to \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergieren.

Definition 18.6. Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\; b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$ integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$ beliebig. Falls die Grenzwerte

$$A = \lim_{\alpha\downarrow a} \int_\alpha^c f \; dx \in \mathbb{R}, \;\; B = \lim_{\beta\uparrow b} \int_c^\beta f \; dx \in \mathbb{R}$$

beide existieren, nennt man das Integral $\int_a^b f \; dx$ *konvergent* und setzt

$$\int_a^b f \; dx = A + B.$$

Eine einfache Anwendung von Lemma 17.1 zeigt, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zahl c. Ähnlich wie in der entsprechenden Bemerkung zu Definition 18.4 sieht man, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^b f \; dx$ konvergiert und der im Sinne von Definition

18.6 gebildete Wert dieses Integrals mit dem im früheren Sinne gebildeten Wert übereinstimmt.

Nach Besipiel 18.5 gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Bemerkung 18.7. Seien f, g Funktionen wie in Definition 18.2, 18.4 oder 18.6, wobei die Integralgrenzen mit a bzw. b bezeichnet seien. Man nennt das Integral $\int_a^b f\,dx$ *absolut konvergent*, falls das Integral $\int_a^b |f| dx$ konvergiert. Mit dem Cauchy-Kriterium für Konvergenz kann man zeigen (Übungsaufgabe):

(a) Aus der absoluten Konvergenz von $\int_a^b f\,dx$ folgt die Konvergenz.

(b) Gilt $|f| \leq |g|$, so impliziert die absolute Konvergenz von $\int_a^b g\,dx$ die von $\int_a^b f\,dx$.

Satz 18.8 (Integralvergleichskriterium)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für eine monoton fallende Funktion $f : [k, \infty) \to [0, \infty)$ konvergiert das Integral $\int_k^\infty f\,dx$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=k}^\infty f(n)$ konvergiert.*

Beweis. Nach Satz 16.9 und Lemma 17.1 existieren alle Integrale $\int_k^R f\,dx$ $(R > k)$ und sind monoton wachsend als Funktion von $R \in [k, \infty)$. Also konvergiert $\int_k^\infty f\,dx$ genau dann, wenn das Supremum

$$s = \sup_{R>k} \int_k^R f\,dx$$

endlich ist. Dabei folgt die nicht triviale Implikation genau wie in Beispiel 8.5(a). Die behauptete Äquivalenz ist daher eine direkte Folgerung der Abschätzungen

$$\sum_{n=k+1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=k+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f\,dx = \int_k^N f\,dx \leq \sum_{n=k+1}^{N} f(n-1) = \sum_{n=k}^{N-1} f(n),$$

die für alle $N \geq k+1$ gelten. □

Korollar 18.9. *Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s \in (1, \infty)$ und divergiert für $s \in (-\infty, 1]$.*

Beweis. Für $s \geq 0$ wende man Satz 18.8 und Beispiel 18.1 (bzw. die Bemerkung nach Definition 18.2) an auf die Funktion

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{x^s}.$$

Für $s < 0$ gilt $\frac{1}{n^s} = n^{-s} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$ und daher divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ für diese s. □

19 Funktionenfolgen

Einfache Beispiele zeigen, dass sich bei punktweiser Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ die Stetigkeit der Funktionen f_n im Allgemeinen nicht auf den punktweisen Limes

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

überträgt.

Beispiel 19.1. Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$ sind stetig, aber wegen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für $x \in [0,1[$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ ist die punktweise gebildete Grenzfunktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

unstetig im Punkt $x = 1$.

Definition 19.2. Sei D eine beliebige Menge und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}),\ f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man nennt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) *punktweise konvergent* gegen f auf D, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ist für alle $x \in D$,

(b) *gleichmäßig konvergent* gegen f auf D, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und jedes $x \in D$.

Bei gleichmäßiger Konvergenz vererbt sich die Stetigkeit auf die Grenzfunktion.

Satz 19.3. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}),\ f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sind alle f_n stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D gegen f, so ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$ beliebig. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ ist für alle $n \geq n_0$ und jedes $x \in D$. Da f_{n_0} stetig ist in x_0, gibt es zu dem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \epsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Mit dem ϵ-δ-Kriterium (Satz 10.6) folgt die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

Satz 19.4. *In der Situation von Satz 19.3 gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b] \subset D$.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int_a^b f_n \, dx - \int_a^b f \, dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \leq \|f_n - f\|_{[a,b]} (b - a) < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Benutzt wurde dabei die Integralabschätzung aus Satz 16.13(b). □

Die Differenzierbarkeit von Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ überträgt sich bei gleichmäßiger Konvergenz im Allgemeinen nicht auf die Grenzfunktion. Ein wichtiger Satz von Weierstraß (Beweis in der Topologie) besagt sogar, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Limes einer Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen p_n auf $[a, b]$ ist.

Satz 19.5. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig differenzierbare Funktionen. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise auf $[a, b]$ gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und konvergiert die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar mit $f' = g$ auf $[a, b]$.*

Beweis. Nach Satz 19.3 ist g stetig. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 17.7) und mit Satz 19.4 folgt, dass

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} (f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt. Da g stetig ist, ist f nach Satz 17.4 differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. □

Ganz analog zu Reihen von Zahlen definiert man Funktionenreihen als die Partialsummenfolgen der zu Grunde liegenden Funktionenfolge.

Definition 19.6. Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen auf einer beliebigen Menge D. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $s_N = \sum_{n=0}^N f_n$. Man definiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = (s_N)_{N \in \mathbb{N}}$$

und nennt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig* (bzw. *punktweise*) *konvergent* auf D, wenn die Funktionenfolge $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig (bzw. punktweise) auf D gegen eine Grenzfunktion konvergiert.

Satz 19.7 (Weierstraßsches Majorantenkriterium)**.** *Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen auf einer Menge D und sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ so, dass*

(i) $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in D$ gilt und

(ii) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

Beweis. Aus dem Majorantenkriterium für Reihen reeller Zahlen (Satz 6.7) folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in D$ absolut konvergiert. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise auf D gegen die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Wir zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sogar gleichmäßig auf D gegen f konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig. Aus der Voraussetzung (ii) folgt, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n < \epsilon$. Dann gilt aber auch

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und jedes $x \in D$. □

Unter einer *Potenzreihe* auf $\mathbb{R}$ mit Entwicklungszentrum $a \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ versteht man eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

wobei die Summanden $a_n(x-a)^n$ als Funktionen in $x \in \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Satz 19.8 (Potenzreihen)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ein fester Punkt. Die Funktionenreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

konvergiere in einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Sei $r = |x_1 - a|$. Dann gilt:

(a) Für jedes $\rho \in (0, r)$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \ \textit{und} \ \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n(x-a)^{n-1}$$

gleichmäßig auf dem Intervall $[a - \rho, a + \rho]$.

(b) Die Funktion $f : (a - r, a + r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ist differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n(x-a)^{n-1}$ für jedes $x \in (a - r, a + r)$.

Beweis. Seien $x_1 \neq a$ und $r = |x_1 - a|$ wie im Satz beschrieben. Dann definiert (Satz 6.3)

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(x_1 - a)^n|$$

eine endliche Zahl. Seien $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f_n(x) = a_n(x-a)^n$ und $g_n(x) = n\ a_n(x-a)^{n-1}$ definierten Funktionen und sei $0 < \rho < r$ beliebig. Für alle $x \in [a - \rho, a + \rho]$ gilt

$$|f_n(x)| = |a_n(x_1 - a)^n| \left| \frac{x-a}{x_1 - a} \right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

für jedes $n \geq 0$ und

$$|g_n(x)| = \frac{n}{|x_1 - a|}\ |a_n(x_1 - a)^n|\ \left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^{n-1} \leq \frac{M}{|x_1 - a|}\ n\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}$$

für alle $n \geq 1$. Sei $c_n = \frac{M}{|x_1-a|} n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}$ für $n \geq 1$. Wegen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n+1}{n}\ \frac{\rho}{r} \ \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}\ \frac{\rho}{r} \in [0,1[$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Quotientenkriterium (Satz 6.9). Mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 19.7) folgt, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ beide gleichmäßig auf $[a-\rho, a+\rho]$ konvergieren. Da für $0 < \rho < r$ die Funktionenfolgen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\geq 0} \quad \text{und} \quad \left(\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)'\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

beide gleichmäßig auf $[a - \rho, a + \rho]$ konvergieren, ist f nach Satz 19.5 auf jedem dieser Intervalle differenzierbar und hat die behauptete Ableitung. Damit ist auch Teil (b) bewiesen. $\square$

Definition 19.9. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein fester Punkt. Man nennt die Zahl

$$R = \sup\{|x - a|;\ x \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$$

den *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$.

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, für die der Grenzwert

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existiert, so folgt mit dem Quotientenkriterium (Satz 6.9), dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ gleich diesem Grenzwert R ist (Aufgabe 21(a)).

Die Koeffizienten einer Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius sind durch die dargestellte Funktion eindeutig bestimmt. Dies zeigt das nächste Korollar.

Korollar 19.10. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion*

$$f : \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < R\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$$

unendlich oft differenzierbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Beweis. Nach Satz 19.8 ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$$

für $|x-a| < R$. Insbesondere wird f' dargestellt durch eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius größer oder gleich R ist. Eine erneute Anwendung von Satz 19.8 zeigt, dass f' differenzierbar ist mit

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ (n+2) a_{n+2} (x-a)^n$$

für $|x-a| < R$. Induktiv folgt, dass f unendlich oft differenzierbar ist mit

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdots (n+k) a_{n+k} (x-a)^n$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < R$. Für $x = a$ erhält man, dass

$$f^{(k)}(a) = k!\ a_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. $\square$

20 Taylorreihen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, das mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Ist $a \in I$ und ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad (x \in I)$$

besitzt, so hat die darstellende Potenzreihe einen Konvergenzradius $R > 0$ und nach Korollar 19.10 ist

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir suchen nach Bedingungen, unter denen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine Potenzreihendarstellung dieser Art besitzt.

Satz 20.1 (Taylorsche Formel mit Lagrangeschem Restglied)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar auf I und seien $a, x \in I$ mit $a \neq x$. Dann gibt es ein $\xi \in]\min(x,a),\ \max(x,a)[$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x-a)^{n+1}.$$

Beweis. Für festes $x \in I$ ist die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\ (x-t)^k$$

differenzierbar und für alle $t \in I$ gilt

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\ (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x-t)^n.$$

Der zweite Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 15.8) angewendet auf die beiden Funktionen F und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = (x-t)^{n+1}$ liefert ein $\xi \in]\min(x,a),\ \max(x,a)[$ mit

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

oder äquivalent mit

$$f(x) = F(x) = F(a) - (g(x)-g(a))\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x-a)^{n+1}.$$

Dies ist genau die Behauptung. □

In der Situation von Satz 20.1 nennt man die Differenz

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k \quad \left(= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ (x-a)^{n+1}\right)$$

das *Restglied* $(n+1)$*-ter Ordnung* von f im Punkt a.

Korollar 20.2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar mit $f^{(n+1)} \equiv 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grade höchstens n.*

Beweis. In Satz 20.1 ist das Restglied $R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = 0$ für jedes $x \in I$. □

Korollar 20.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und sei $a \in I$. Für $x \in I$ ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

dann und nur dann, wenn für die Restglieder von f in a gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Dies *ist zum Beispiel erfüllt für alle $x \in I$, wenn eine Konstante $A > 0$ existiert mit $|f^{(n)}| \le A$ auf I für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Alle Behaptungen folgen direkt aus Satz 20.1. □

Bemerkung 20.4. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und sei $a \in I$. Man nennt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ die *Taylorreihe* von f in a. Die Taylorreihe von f in a braucht in keinem Punkt $x \neq a$ zu konvergieren. Wenn sie konvergiert, braucht ihr Wert nicht $f(x)$ zu sein.

Beispiele 20.5. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ für } x \neq 0,\ f(0) = 0$$

ist unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zum Beweis zeigen wir induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f n-mal differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ und dass ein Polynom p_n existiert mit

$$f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $n = 0$ genügt es, die Stetigkeit von f in 0 zu begründen. Diese ist aber klar, denn aus $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ folgt mit der Kettenregel für Grenzwerte (Satz 9.9), dass $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ist. Ist die Behauptung gezeigt für n, so gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}(f^{(n)}(x)) = \left(-p_n'(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} + 2p_n(\frac{1}{x})\frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = p_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit $p_{n+1}(x) = -p_n'(x)x^2 + 2\ p_n(x)x^3$. Hat das Polynom p_n die Gestalt $p_n(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung für $0 < |x| \le 1$ (siehe Beispiel 11.7(b))

$$\left|\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x}\right| = \left|\frac{p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}\sum_{i=i}^{N} |a_i|\,\frac{1}{|x|^i}e^{-\frac{1}{x^2}} \le \sum_{i=0}^{N} |a_i| \left(\frac{1}{x^2}\right)^{i+1} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 0.$$

Diese Beobachtungen beenden den induktiven Beweis. Da $f^{(n)}(0) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Nach Korollar 19.10 ist für eine Funktion f, die auf einem offenen Intervall I um a durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (x \in I)$$

dargestellt wird, die Taylorreihe von f in a gleich der darstellenden Potzenreihe. Insbesondere sind die Taylorreihen der Exponentialfunktion, von Sinus und Cosinus mit Entwicklungszentrum $a = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Satz 20.6 (Logarithmusreihe)**.** *Für $-1 < x \leq 1$ gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Insbesondere ist $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Beweis. Für $|x| < 1$ folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 17.7)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt.$$

Da die Reihe für $|t| \leq |x|$ nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 19.7) gleichmäßig konvergiert, kann man nach Satz 19.4 die Summation und Integration vertauschen und erhält

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Damit ist die behauptete Reihendarstellung für jeden Punkt x im offenen Intervall $]-1, +1[$ gezeigt. Dass diese Darstellung auch im Punkt $x = 1$ richtig bleibt, folgt aus dem nächsten Satz zusammen mit dem Leibnizkriterium (Satz 6.11). □

Satz 20.7 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in jedem Punkt $x \in\,]-1, +1]$ und definiert eine stetige Funktion*

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Beweis. Nach Satz 19.8 konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in jedem Punkt $x \in\ ]-1,1[$ und die dargestellte Funktion f ist stetig auf $]-1,1[$. Bleibt noch zu zeigen, dass $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = f(1)$ ist. Zum Beweis definieren wir $s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$ für $n \geq -1$. Offensichtlich gilt $s_{-1} = f(1),\ s_n - s_{n-1} = -c_n$ für $n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Insbesondere ist

$$c = \sup_{n\geq -1} |s_n| < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium (Satz 6.7) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolut in jedem Punkt $x \in\ ]-1,1[$. Für $x \in\ ]-1,1[$ gilt

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + f(1).$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $x \in]0,1[$ gilt

$$|f(1) - f(x)| = (1-x)\left|\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n\right| \leq c(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^n + \epsilon(1-x)\sum_{n=N}^{\infty} x^n \leq c(1-x^N) + \epsilon.$$

Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(1) - f(x)| < 2\epsilon$ für alle $x \in]0,1[$ mit $|x-1| < \delta$. Damit ist die Stetigkeit von f im Punkt $x = 1$ gezeigt. □

Im Beweis von Satz 20.6 haben wir gezeigt, dass die Identität

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

für jedes $x \in]-1,+1[$ gilt. Die linke Seite definiert eine stetige Funktion für $x \in\ ]-1,\infty)$, die rechte Seite definiert eine stetige Funktion für $x \in\ ]-1,+1]$ nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Satz 20.7). Also gilt auch

$$\log 2 = \lim_{x\uparrow 1} \log(1+x) = \lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Satz 20.8. *Für $|x| \leq 1$ gilt*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Beweis. Für $|x| < 1$ folgt wieder mit dem Hauptsatz (Satz 17.7)

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n\,dt.$$

Wegen $|(-t^2)^n| \leq |x|^n$ für $|t| \leq |x| < 1$ konvergiert die rechts unter dem Integral stehende Reihe nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 19.7) gleichmäßig für $|t| \leq |x|$. Nach Satz 19.4 kann man Summation und Integration vertauschen und erhält

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für $|x| < 1$. Für $x = \pm 1$ bleibt die in Satz 20.8 behauptete Identität richtig, da nach dem Abelschen Grenzwertsatz auch die rechte Seite

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^2)^n$$

stetig in den Punkten $x = \pm 1$ ist. $\square$

Indem man die Identität aus Satz 20.8 in $x = 1$ auswertet, erhält man die Reihendarstellung

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Diese Formel findet man bereits in einer Arbeit von Leibniz aus dem Jahre 1674.

Literatur

[Fo] Forster O., Analysis I, Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[Ka] Kaballo W., Einführung in die Analysis I, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2000.

[Wa] Walter W., Analysis I, Springer, Berlin, 2004.