**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
M. Sc. Sebastian Langendörfer

**Übungen zur Vorlesung**
**Analysis I**
Wintersemester 2018/19

**Blatt 1** Abgabetermin: 24.10.2018, vor der Vorlesung

---

*Auf diesem Blatt können Sie ausnahmsweise nur bis zu 8 Punkte erzielen. Die restlichen Aufgaben sind Präsenzaufgaben, die Sie zusammen mit den Übungsleitern in der ersten Übung lösen und dann besprechen werden.*

### Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien eine Abbildung $f : M \to N$ und Teilmengen $A, B \subseteq M$, $C, D \subseteq N$. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

(c) Prüfen Sie für jede der beiden Aussagen, ob sie richtig bleibt, wenn man überall '$\cup$' durch '$\cap$' ersetzt? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Gegenbeispiel oder einem Beweis.

### Aufgabe 2 (2,5 + 1,5 = 4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Berechnen Sie damit

$$\sum_{k,l \geq 1, k+l=n} k \cdot l.$$

(b) Für alle $n \geq 4$ gilt

$$2^n \geq n^2.$$

### Präsenz-Aufgabe 1 (0 Punkte)

(a) Seien $A, B, C$ Mengen. Zeigen Sie die Distributivgesetze:

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) Seien $A, B$ Teilmengen einer Menge $X$. Zeigen Sie die De Morganschen Regeln:

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

**(bitte wenden)**

## Präsenz-Aufgabe 2 (0 Punkte)

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig, aber kein Polynom ist.

(b) Zu jeder natürlichen Zahl $n$ gibt es eine natürliche Zahl $m$ mit $m < n$.

(c) Alle natürliche Zahlen $n, m$ mit $n^2 = m^2$ haben verschiedene Vorzeichen.

Welche der Aussagen ist wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

*Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in X$ mit $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ folgt.*
*Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.*

## Präsenz-Aufgabe 3 (0 Punkte)

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind $f$ und $g$ injektiv, so auch $g \circ f$.

(b) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so auch $g \circ f$.

(c) Gilt in a) und b) jeweils auch die Umkehrung?