UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 10 Abgabetermin: 9.01.2019, vor der Vorlesung

(*Hinweis: Auf diesem Blatt finden Sie insgesamt 8 Zusatzaufgaben. Diese Aufgaben sind so konzipiert, dass Sie insgesamt eine realistische Probeklausur darstellen, d.h. Sie können damit üben, wie Sie bei einer Klausur mit dem Stoff zum jetzigen Zeitpunkt abschneiden würden (wie bei der echten Klausur sind die Aufgaben auf 180 Minuten Bearbeitungszeit ausgelegt). Um den Korrekturaufwand in Grenzen zu halten, dürfen Sie höchstens zwei dieser 8 Aufgaben zur Korrektur abgeben.*)

Aufgabe 36 (4×1=4 Punkte)

Seien $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ und } \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

(b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

(c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$,

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-k} \cosh t = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-k} \sinh t = \infty$.

Aufgabe 37 (1+1+(1+2) = 5 Punkte)

(a) Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ mit $u \neq 0$ und $c = -\frac{w}{u} + (\frac{v}{2u})^2$. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

  (i) $uz^2 + vz + w = 0$.
  (ii) $(z + \frac{v}{2u})^2 = c$.

(b) Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben in der Form (Polardarstellung)

$$c = |c| \cdot e^{i\phi} \quad \text{mit} \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen z und $-z$ in $\mathbb{C}$ besitzt mit

$$z = \sqrt{|c|} \cdot e^{i\frac{\phi}{2}}.$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teile (a) und (b) alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

  (a) $z^2 = 50i$,
  (b) $z^2 + 3iz = 2$

(bitte wenden)

Aufgabe 38* **(4* Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$ gilt.

Aufgabe 39* **(3*+3*+3*=9* Punkte)**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n=\sqrt{n^6+1}-n^3$.

(ii) $b_n=\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{n^2+4}{n^2+1}$.

(iii) $c_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n+2}-\frac{n}{2}$.

Aufgabe 40* **(6* Punkte)**

Sei $0<x_0<1$. Durch $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n^2+2)$ für $n\in\mathbb{N}$ werde rekursiv eine Folge definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 41* **(2*+2*+4*=8* Punkte)**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn die Folgen $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(ii) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent, so ist die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iii) Ist $a_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ konvergiert.

Aufgabe 42* **(3*+3*+3*=9* Punkte)**

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz, Divergenz und absolute Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{3n^2+5}\right)^n$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(*Hinweis: Benutzen Sie ein Ergebnis aus den Übungen oder die Logarithmusungleichung* $\log x\leq x-1$.)

(bitte wenden)

Aufgabe 43* **(4*+4*= 8* Punkte)**

(i) Sei $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $B \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Zeigen Sie: Existiert für jedes $x \in B$ ein $x' \in A$ mit $x < x'$, so ist auch B nach oben beschränkt und es gilt $\sup B \leq \sup A$. Gilt in dieser Situation bereits $\sup B < \sup A$?

(ii) Seien A, B beschränkte nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $A \cup B$ ist beschränkt mit

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \quad \text{und} \quad \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

Aufgabe 44* **(4*+4*=8* Punkte)**

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $x_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n^2}\right) + \left(3 + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n}\right)$. Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Folgern Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 45* **(4*+4*=8* Punkte)**

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^a \cos(x^{-2}) & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x \leq 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist genau dann, wenn $a > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2^x - x = 4$ eine Lösung in $[0, 5]$ hat.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2019!