



Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 11

Abgabetermin: 16.01.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 46

(1+1,5+1,5 = 4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin |x|,$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & , \text{ falls } x \geq 0 \\ 2 - e^{-x} & , \text{ sonst.} \end{cases} .$

Aufgabe 47

(0,5 + 0,5 + 4 × 1 = 5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \cot x,$

(c) $f_3 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \cos(\log x),$

(d) $f_4 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = x^x,$

(e) $f_5 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x) = (x^x)^x,$

(f) $f_6 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f_6(x) = x^{(x^x)}.$

Aufgabe 48

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist. Untersuchen Sie die Funktion $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

(bitte wenden)

Aufgabe 49**(4 Punkte)**

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei n -mal auf $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls n -mal differenzierbar auf D ist mit

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für alle $x \in D$.