UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Wintersemester 2018/19

Blatt 12 Abgabetermin: 23.01.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 50 (2+2 = 4 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung des Mittelwertsatzes:

(i) Es gilt $x\cos(x) < \sin(x)$ für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(ii) Für alle $x > 0$ ist $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$.

Aufgabe 51 (2+3=5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

(i) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\log(x)}{x}$,

(ii) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x^2}$.

Aufgabe 52 (3 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]a,b[}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow b} f'(x) = c \in \mathbb{R}$$

existiert, so ist f in b differenzierbar mit $f'(b) = c$.

(bitte wenden)

Aufgabe 53 **(2+2=4 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$,

---

Aufgabe 54 **(2*+3*=5* Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist f' beschränkt, so ist f gleichmäßig stetig.

(b) Ist $f(0) = 0$ und ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist die Funktion

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

monoton wachsend.