



Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 13

Abgabetermin: 30.01.2019, vor der Vorlesung

Falls Sie eine der Klausuren mitschreiben wollen, denken Sie bitte daran, sich rechtzeitig im LSF anzumelden. Sie müssen spätestens eine Woche vor der jeweiligen Klausur angemeldet sein.

Aufgabe 55

(2+2=4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe Riemannscher Summen die folgenden Grenzwerte:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Aufgabe 56

(4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$\text{Ist } \int_a^b f(x) dx = 0, \text{ so ist } f \equiv 0.$$

Gilt diese Aussage immer noch, wenn man auf die Stetigkeit von f verzichtet und stattdessen nur voraussetzt, dass f integrierbar ist?

Aufgabe 57

(1 + 1 + 1,5 + 1,5 + 1 + 2 = 8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{ll} (a) \int_0^\alpha \frac{t}{3t^2+1} dt \quad (\alpha > 0), & (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ (c) \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx, & (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta, \\ (e) \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} dx, & (f) \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} dx. \end{array}$$

Aufgabe 58*

(3* Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist} \end{cases}$$

definierte Funktion nicht Riemann-integrierbar ist.