UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 14 Abgabetermin: 30.01.2019, vor der Vorlesung

Die folgenden Aufgaben dienen nur der Klausurvorbereitung und werden weder abgegeben noch korrigiert.

Aufgabe 59 (- Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} > \frac{13}{24}.$$

Aufgabe 60 (- Punkte)

Seien $(a_n)_n$ und $(s_n)_n$ Folgen in $[0, \infty)$ derart, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k$ konvergiert und $a_n \geq a_{n+1} - s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert.

(*Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Folge* $(b_n)_n$ *mit* $b_n = a_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k$ *für* $n \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 61 (- Punkte)

Sei $\alpha > 0$. Sei $a_0 = \sqrt{\alpha}$ und $a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie Ihren Grenzwert.

Aufgabe 62 (- Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{3-3n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{n^2+2n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $a_n = \sum_{k=1}^{n} kn$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konvergiert.

Aufgabe 63 (- Punkte)

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\log x}$ (iii) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ (iv) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \exp(-\tfrac{1}{x})$

(bitte wenden)

Aufgabe 64 **(- Punkte)**

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass $f = g$ oder $f = -g$ gilt.

(b) Es seien $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

Aufgabe 65 **(- Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f(0) = 0$ sowie $f(x - y) = f(x) - f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Ist f differenzierbar in 0, so ist f differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, und es gilt $f'(x) = f'(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Ist f differenzierbar, so existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 66 **(- Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+6}{x^2-4}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} t \sin t \cos t \, dt$ (*Hinweis*: Integrieren Sie zweimal partiell.),

(c) $\int_e^{e^e} \frac{\log(\log(x))}{x} dx,$

(d) $\int_0^{\log(2)} x \cosh(x) dx.$
(*Hinweis: Die Funktion* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch* $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$)