UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Wintersemester 2018/19

Blatt 2 Abgabetermin: 31.10.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 3 **(2+2+2=6 Punkte)**

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ für alle $n \geq 1$,

(ii) $(1-a) \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + a^{(2^k)}\right) = 1 - a^{(2^{n+1})}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$,

(iii) $\binom{n+1}{k+1} = \sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ reelle Zahlen ($n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Zeigen Sie, dass mit beliebigem $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Die folgende Aussage ist offensichtlich falsch:

Befindet sich unter n Tieren mindestens ein Elefant, so sind sie alle Elefanten.

Finden und erklären Sie den Fehler in dem folgenden Induktionsbeweis:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Aussage offensichtlich.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Seien nun $n + 1$ Tiere gegeben, unter denen sich mindestens ein Elefant befindet. Wir ordnen die Tiere so in einer Reihe an, dass sich der Elefant unter den ersten n Tieren befindet. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann alle der n ersten Tiere Elefanten. Damit befindet sich auch unter den letzten n Tieren mindestens ein Elefant. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung nochmals an und können folgern, dass auch die letzten n Tiere alle Elefanten sind. Es ist gezeigt, dass alle $n + 1$ Tiere Elefanten sind.

(bitte wenden)

Aufgabe 6 **(1+1+1=3 Punkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Leiten Sie die folgenden Eigenschaften aus den Körperaxiomen ab. (Es dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Folgerungen benutzt werden.) Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Axiom oder welche Folgerung Sie benutzt haben.

(i) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$,
(*Hinweis: Das Symbol $\pm$ ist hier so zu lesen, dass Sie die Aussage einmal zeigen sollen, wenn überall ein $+$ steht und einmal, wenn überall ein $-$ steht. Die entsprechenden Beweise werden einander aber so ähnlich sein, dass Sie auch überall abkürzen dürfen, indem Sie mit $\pm$ arbeiten.*)

(ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$,

(iii) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, falls $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$.