UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Wintersemester 2018/19

Blatt 3 Abgabetermin: 7.11.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 7 (3+1+2=6 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m < n$ und $2 \le k \le n$ erfüllt ist. Gilt die erste Ungleichung auch für $k = 0, 1$?

(b) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m < n$ die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(*Hinweis: Binomialtheorem.*)

(c) Zeigen Sie, dass

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.
(*Hinweis: Binomialtheorem und geometrische Summe.*)

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu\right)^2 \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2\right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2\right)$$

(*Hinweis: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \lambda y_\nu)^2 \ge 0$. Benutzen Sie dies für ein geschickt gewähltes λ.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 9 **(1+3=4 Punkte)**

(i) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

(ii) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Es gelte $b > 0$ und $b + c > 0$. Zeigen Sie

- Ist $\frac{a}{b} > 1$ und $c > 0$, so gilt $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.
- Ist $\frac{a}{b} > 1$ und $c < 0$, so gilt $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$.
- Ist $\frac{a}{b} = 1$, so gilt $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$.
- Ist $\frac{a}{b} < 1$ und $c > 0$, so gilt $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$.
- Ist $\frac{a}{b} < 1$ und $c < 0$, so gilt $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

Aufgabe 10 **(4 Punkte)**

Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definiert man das *arithmetische Mittel* von $x_1, \ldots, x_n$ durch

$$a_n = a(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Zeigen Sie, dass für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$a_n^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

(*Hinweis: Man kann einen Induktionsbeweis führen und dabei die Bernoullische Ungleichung auf den Ausdruck* $(\frac{a_{n+1}}{a_n})^{n+1} = (1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n})^{n+1}$ *anwenden.*)