UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 4 Abgabetermin: 14.11.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 11 (2+1+2=5 Punkte)

(i) Seien $q \in [0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|x_{n+1}| \leq q|x_n|$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > x$. Zeigen Sie, dass es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $x_n < q$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(iii) Seien $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+x)^n} = 0.$$

Aufgabe 12 (1+1+1+2*=3+2* Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

(i) $x_n = \frac{(3n+1)^2(2n+1)}{2n^3-1}$,

(ii) $x_n = \frac{2^n+n}{n!}$,

(iii) $x_n = \frac{(-1)^n(2n-1)^2}{n^2-1}$,

(iv)* $x_n = \frac{a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$
mit $r, s \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_r, b_0, \ldots, b_s \in \mathbb{R},\ a_r \neq 0,\ b_s \neq 0.$

Aufgabe 13 (1+1+3=5 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

$$(a)\ x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad (b)\ x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{4}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 14 **(4 Punkte)**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen , die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \geq 1)$$

gegen a konvergiert. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 15* **(1*+2*=3* Punkte)**

Benutzen Sie die Definition 4.2 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die Folgen $(\frac{3}{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{n^2}{n^2+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Hinweis:

Mit einem * versehene Aufgaben sind Zusatzaufgaben. Die Zusatzpunkte gehen nicht in die Berechnung der maximal erreichbaren Punktzahl der Übungen ein.