UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 5 Abgabetermin: 21.11.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 16 (2+(1+1+2+1)=7 Punkte)

(a) Prüfen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls Ihren Grenzwert.

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ seien

$$a_n = \sqrt{n+1000}-\sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} \text{ und } c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}}-\sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass $a_n > b_n > c_n$ ist für $1 \leq n < 1000000$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \text{ und } \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Aufgabe 17 (1,5+1,5=3 Punkte)

(i) Sei $0 < q < 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Es gelte

$$|x_{n+1}-x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|$$

für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(*Hinweis: Weisen Sie nach, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.*)

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(bitte wenden)

Aufgabe 18 **(1,5+1+0,5+1=4 Punkte)**

Seien $a, x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+^*$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $x_n^k \geq a$. Schätzen Sie hierfür den Ausdruck $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^k$ mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung nach unten ab.

(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(iii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(iv) Der Grenzwert der Folge erfüllt die Gleichung $x^k = a$.

(Man nennt eine Zahl $x > 0$ mit der Eigenschaft $x^k = a$ für $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ die k-te Wurzel *von a und schreibt hierfür $\sqrt[k]{a}$ oder $a^{\frac{1}{k}}$.)*

Aufgabe 19 **(1+1+1=3 Punkte)**

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie in Teil (i) auch den Grenzwert der gegebenen Reihe:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+3}}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n^2+1}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n^5+3n^4+n^2}$.
