UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 6 Abgabetermin: 28.11.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 20 (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^4 - n^3 + 5n + 1}{4n^5 + 3n^2 + 1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 6}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 21 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Existiert der Limes $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ eigentlich oder uneigentlich, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$.

(b) Untersuchen Sie, für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n^3 + n)4^n}$$

konvergiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 22 **(1+1+1+1+2*=4+2* Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^3}{3^n}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2}, \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \qquad (e)^* \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^2}.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 7 für Teil (c).*)

Aufgabe 23 **(2+1+1=4 Punkte)**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen derart, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ ist absolut konvergent,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ ist konvergent,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ ist konvergent.
