UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Wintersemester 2018/19

Blatt 7 Abgabetermin: 5.12.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 24 (1+3=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$ für alle $x, y > 0$ gilt.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.

Aufgabe 25 (2+2+2*=4 + 2* Punkte)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere beschränkte Mengen und sei $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Im Falle $\lambda > 0$ gilt für die Menge $\lambda A = \{\lambda x;\ x \in A\}$

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A \text{ und } \inf(\lambda A) = \lambda \inf A,$$

und im Fall $\lambda < 0$ gilt

$$\sup(\lambda A) = \lambda \inf A \text{ und } \inf(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

(b) Für die Menge $A + B = \{x + y;\ x \in A, y \in B\}$ gilt

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \text{ und } \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

(c)* Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}_+$, so gilt für die Menge $AB = A \cdot B = \{xy; x \in A, y \in B\}$, dass

$$\inf(AB) = \inf(A)\inf(B), \sup(AB) = \sup(A)\sup(B).$$

Aufgabe 26 (1+1,5+1,5 = 4 Punkte)

Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich dabei um ein Minimum bzw. ein Maximum handelt.

(i) $M_1 = \{t \in \mathbb{R};\ -7 < t < -3 \text{ oder } -2 \leq t \leq 2\}$.

(ii) $M_2 = \{(-1)^n + \frac{1}{m};\ m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(iii) $M_3 = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m};\ m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(*Hinweis: Denken Sie insbesondere in Teil (i) daran, dass Sie ihre Behauptungen sorgfältig begründen müssen.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 27 **(1+3+2*=4+2* Punkte)**

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $\eta \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n), \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty}(-x_n).$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\eta = \liminf_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \begin{cases} x_n < \eta + \epsilon & \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ x_n < \eta - \epsilon & \text{für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\eta = \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \begin{cases} x_n > \eta - \epsilon & \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ x_n > \eta + \epsilon & \text{für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(iii)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+^* \text{ und } \beta = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert.}$$
