UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2018/19

Blatt 8 Abgabetermin: 12.12.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 28 (1,5+1,5 = 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{M;\ M \subset \mathbb{N}\}$ der Menge der natürlichen Zahlen nicht abzählbar ist.

(*Hinweis: Betrachten Sie zu einer beliebigen Funktion* $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *die Menge* $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \notin f(x)\} \subset \mathbb{N}$.)

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{M;\ M \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$ der Menge der natürlichen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 29 (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$,

Aufgabe 30 (1+1+1+1+2+2*=6+2* Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Stetigkeit.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \max\{x, 0\}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -1+x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$,

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$,

(d) $f_4 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \frac{(x-3)\exp(5x^2-4x)-2x}{x^3-x^2+x-1}$,

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = \begin{cases} \frac{x}{\exp(\frac{1}{|x|})} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$,

(f)* $f_6 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f_6(x) = \sqrt{x}(x - [x])$.

(bitte wenden)

Aufgabe 31 **(2+2+2*=4 + 2* Punkte)**

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$, so hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

(b) Gilt $f(-1) = f(1)$, so gibt es ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = f(x_0 - 1)$.

(c)* Gilt $f(0) = f(1)$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in [0, 1]$ mit $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

(*Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf geeignete Hilfsfunktionen an.*)