Mathematik für Naturwissenschaftler I

Jörg Eschmeier

Universität des Saarlandes

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und Rechnen mit Zahlen

1.1 Zahlbereiche

Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \\ \mathbb{Q} &= \{\tfrac{p}{q} | \, p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0\} \end{aligned}$$

die Mengen der natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, rationalen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (Menge aller Dezimalbrüche)

$$x_n \ldots x_0, x_{-1}x_{-2}x_{-3} \ldots \qquad (x_i \in \{0, \ldots, 9\}).$$

Die Rechenoperationen $+, -, \cdot, :$ mit den zugehörigen Regeln werden als bekannt vorausgesetzt. Etwa

$$(x+y)+z = x+(y+z), (xy)z = x(yz) \quad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$x(y+z) = xy+xz, (x+y)z = xz+yz \quad \text{(Distributivgesetze)}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}, \ \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, \ \frac{1}{(\frac{p}{q})} = \frac{q}{p} \qquad \text{(Bruchrechenregeln).}$$

1.2 Potenzrechnen

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Man schreibt:

$$a^0 = 1, a^n = a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ Faktoren}).$$

Es gelten die Rechenregeln:

$$a^n a^m = a^{n+m}, a^n b^n = (ab)^n, (a^n)^m = a^{nm}.$$

Allgemeiner definiert man für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \text{die eindeutige positive Lösung der Gleichung } x^n = a$$

(Wir werden später sehen, dass es eine solche eindeutige Lösung gibt) und

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m, a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Als andere Schreibweise für die n-te Wurzel benutzt man:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Allgemeiner kann man definieren (später!):

$$a^x \text{ für alle } a > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^x > 0,\ a^x a^y = a^{x+y},\ a^x b^x = (ab)^x,\ (a^x)^y = a^{xy},\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

1.3 Logarithmen (Umkehrung des Potenzrechnens)

Definition 1.1. Für $c > 0$ ist (wir begründen die Existenz später)

$$\log c = \log_{10} c = \text{ die eindeutige Zahl } x \in \mathbb{R} \text{ mit } 10^x = c.$$

Etwa gilt:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 &&\Rightarrow \log 100 = 2,\ 10^3 = 1000 \Rightarrow \log 1000 = 3, \\ 10^{-1} &= 0,1 &&\Rightarrow \log 0,1 = -1, \\ \sqrt{10} &= 10^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow \log\sqrt{10} = \tfrac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

Rechenregeln 1.2. *Für $x, y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\log(xy) = \log x + \log y,\ \log(x^n) = n \log x,\ \log 1 = 0,\ \log(\frac{1}{x}) = -\log x.$$

Dies folgt aus den Potenzrechenregeln:

$$x = 10^{\log x}, y = 10^{\log y} \Rightarrow xy = 10^{\log x} 10^{\log y} = 10^{(\log x + \log y)}.$$

Also ist $\log(xy) = \log x + \log y$. Insbesondere gilt:

$$0 = \log 1 = \log(x\frac{1}{x}) = \log x + \log\frac{1}{x} \Rightarrow \log\frac{1}{x} = -\log x.$$

Der Logarithmus verwandelt Folgen der Form

$$a, ac, ac^2, ac^3, \dots \qquad (a, c > 0)$$

in Folgen von Zahlen mit gleichem Abstand

$$\log a,\ \log a + \log c,\ \log a + 2\log c,\ \log a + 3\log c,\ \dots\ .$$

1.4 Logarithmisches Messen

Viele Größen in der Physik, Chemie werden logarithmisch gemessen, das heißt nicht die Größe selbst, sondern ihr Logarithmus wird angegeben.

Beispiele:

(1) pH-Wert = negativer Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration

(2) Die Schallintensität gibt die Schallleistung an, die je Flächeneinheit durch eine durchstrahlte Fläche tritt. Sie wird gemessen in Watt$/m^2$. Es entspricht:

$$\begin{array}{lcl} \text{untere Hörgrenze} & : & 10^{-12} \text{ Watt}/m^2, \\ \text{obere Hörgrenze} & : & 10 \text{ Watt}/m^2, \\ \text{normaler Hörbereich} & : & 0-1 \text{ Watt}/m^2, \\ \text{unerträglicher Lärm} & : & 1-10 \text{ Watt}/m^2. \end{array}$$

Eine Einteilung in subjektiv gleich große Intervalle ist gegeben durch

$$10^{-12} \quad 10^{-11} \quad 10^{-10} \quad \dots \quad 10^{-2} \quad 10^{-1} \quad 1 \quad 10 \quad \text{Watt}/m^2.$$

Die zugehörigen Logarithmen bilden Intervalle gleicher Länge

$$-12 \quad -11 \quad -10 \quad \dots \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1.$$

Dies entspricht einer subjektiven Lautstärke $L = 10 \log I + 120$ von

$$0 \quad 10 \quad 20 \quad \dots \quad 100 \quad 110 \quad 120 \quad 130 \quad \text{Phon.}$$

Was geschieht bei der Addition von Geräuschen?
Typische Situation im Hörsaal ($I = 10^{\frac{L-120}{10}}$):

$$\begin{array}{lll} 45\,\text{Phon} & \text{durch allgemeines Gemurmel} & \hat{=}\, I = 10^{-7,5} = \sqrt{10}\,10^{-8} \\ 40\,\text{Phon} & \text{durch Straßenlärm} & \hat{=}\, I = 10^{-8}. \end{array}$$

Die Schallintensitäten addieren sich zu

$$I = I_1 + I_2 = (1+\sqrt{10})10^{-8} \approx 4,16 \cdot 10^{-8} \text{ Watt}/m^2.$$

Dies entspricht einer subjektiven Lautstärke in Phon

$$L = 10(\log 4,16 + \log 10^{-8}) + 120 \approx 46,2 \text{ Phon.}$$

1.5 Mittelwert und Streuung

Wir messen n-mal dieselbe Größe und erhalten die Messwerte

$$x_1, \dots, x_n.$$

In der Statistik definiert man das **Arithmetische Mittel**:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

die **Varianz** (mittlere quadratische Abweichung)

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad (= \frac{1}{n}(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2),$$

die **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

1.6 Mengen und Funktionen

Wir schreiben Mengen in **aufzählender Form**

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

oder **beschreibender Form**

$$A = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft} \ldots\}$$

und benutzen die Bezeichnungen

$$\begin{array}{lcl} A \cup B & = & \{x|\; x \in A \text{ oder}\, x \in B\}, \\ A \cap B & = & \{x|\; x \in A \text{ und}\, x \in B\}, \\ A \subset B & & \text{falls jedes } x \in A \text{ auch zu } B \text{ gehört}, \\ A^c & = & \{x|\; x \notin A\}. \end{array}$$

Dabei steht

$$\begin{array}{ll} \in & \text{für “gehört zu“ oder “ist Element von“}, \\ \notin & \text{für “ist kein Element von“}. \end{array}$$

Ist $A \subset B$, so nennt man

$$B \setminus A = \{x \in B|\; x \notin A\}$$

das **Komplememt von** A **in** B.

Zwei durch “und“ verbundene Aussagen sind wahr genau dann, wenn beide Aussagen wahr sind, zwei durch “oder“ verbundene Aussagen genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Sind A und B zwei Aussagen, so kürzt man ab:

- Aus A folgt B (oder A impliziert B) als
$$A \Rightarrow B.$$
- Aus A folgt B und aus B folgt A (oder A und B sind äquivalent) als
$$A \Leftrightarrow B.$$

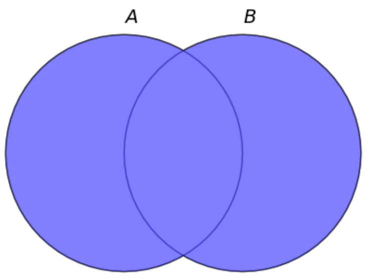

Abbildung 1: Vereinigung

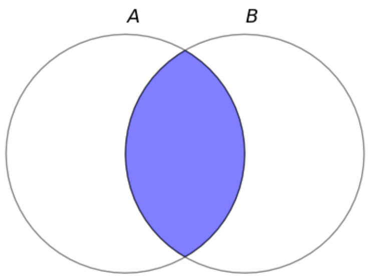

Abbildung 2: Durchschnitt

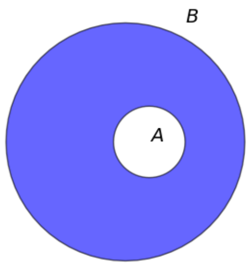

Abbildung 3: Differenz

Eine **Abbildung** (**Funktion**)

$$f : A \to B, x \mapsto f(x)$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ einer Menge A ein Element $f(x) \in B$ einer Menge B zuordnet. Man nennt f

- injektiv, falls $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
- surjektiv, falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$,
- bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so schreibt man $f^{-1} : B \to A$ für die Funktion mit

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ für alle } y \in B \qquad (\textbf{Umkehrfunktion}).$$

Sind $f : A \to B, g : B \to C$ Funktionen, so nennt man die Funktion

$$g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x)).$$

die **Komposition** von g und f.

2 Komplexe Zahlen

2.1 Definition komplexer Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) |\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

der geordneten Paare reelle Zahlen lässt sich veranschaulichen als die Menge der Punkte in der Ebene

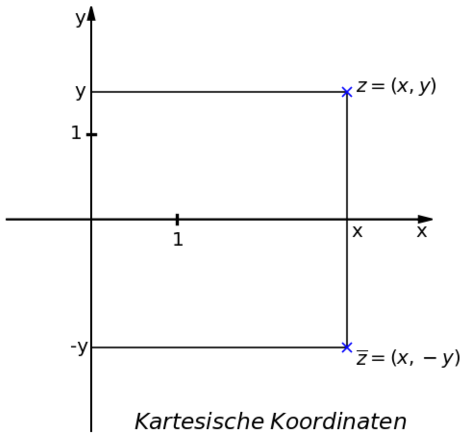

Abbildung 4: Komplexe Zahlen

Man nennt x und y die **kartesischen Koordinaten** von $z = (x, y)$. Die x-Koordinate von $z \in \mathbb{R}^2$ heißt auch **Realteil** von z:

$$\mathrm{Re}(x, y) = x,$$

die y-Koordinate von $z \in \mathbb{R}^2$ nennt man auch **Imaginärteil** von z:

$$\mathrm{Im}(x, y) = y.$$

Den Abstand eines Punktes $z = (x, y)$ von $(0, 0)$ schreibt man als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und nennt $|z|$ den **Betrag** von z. Für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ nennt man $\overline{z} = (x, -y)$ die **konjugiert komplexe Zahl** zu z. Die reelle Zahlengerade (= Punkte auf der x-Achse) ist Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R} \hat{=} \{(x, 0) |\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Hierbei schreibt man die reellen Zahlen umständlicher als

$$(x, 0) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und fasst x auf als Abkürzung für $(x, 0)$.

Definition 2.1. Auf $\mathbb{R}^2$ definiert man eine Addition durch

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

und eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Man schreibt $\mathbb{C}$ für $\mathbb{R}^2$ versehen mit dieser Addition und Multiplikation und nennt $\mathbb{C}$ den **Körper der komplexen Zahlen**.

2.2 Rechenregeln

(a) Für die Verknüpfungen $+, \cdot$ in $\mathbb{C}$ gelten genauso wie für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ die

Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze.

Zum Beispiel gilt das Distributivgesetz

$$\begin{aligned} & (x, y)((x', y') + (x'', y'')) = (x, y)(x' + x'', y' + y'') \\ = \quad & (xx' + xx'' - yy' - yy'', xy' + xy'' + yx' + yx'') \\ = \quad & (x, y)(x', y') + (x, y)(x'', y''). \end{aligned}$$

(b) Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$, aber es gilt

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

(c) Man schreibt der Einfach halber (**komplexe Schreibweise**)

$$x \text{ statt } (x, 0) \text{ und } i \text{ statt } (0, 1).$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl (x, y) schreiben als

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Man rechnet mit den Zahlen $x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ genau wie mit reellen Zahlen und beachte dabei, dass gilt

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = i, \dots .$$

(d) Für $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ gilt

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

(e) Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (das heißt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$) ist

$$z\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + i\left(x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

Die durch

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

definierte Zahl ist die eindeutige Zahl in $\mathbb{C}$ mit

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Man schreibt auch $\frac{1}{z}$ statt z^{-1} und definiert $\frac{z}{w} = zw^{-1}$ für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$. Auch für die Division in $\mathbb{C}$ gelten dieselben Regeln wie für die Division in $\mathbb{R}$.

2.3 Eigenschaften des Komplexen Konjugierens

Man rechnet leicht nach, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $\overline{(\overline{z})}$, $\quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ für $z_2 \neq 0$.

(b) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

So folgt etwa für $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2)$

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1 z_2}.$$

2.4 Eigenschaften des Betrages

Für $z \in \mathbb{R}$ ist $|z|$ der übliche Absolutbetrag in $\mathbb{R}$. Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$, $|z| \geq |\operatorname{Im} z|$,
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ für $z_2 \neq 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\qquad$ (Dreiecksungleichung).

Die Dreiecksungleichung folgt so:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{(z_1\overline{z_2})} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

2.5 Darstellung in Polarkoordinaten

Der Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit kartesischen Koordinaten $x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich auch durch seine Polarkoordinaten beschreiben, das heißt durch die Angabe seines Abstandes $|z|$ zum Koordinatenursprung und des Winkels $\varphi \in [0, 2\pi[$ zwischen dem Ortsvektor zum Punkt z und der x-Achse

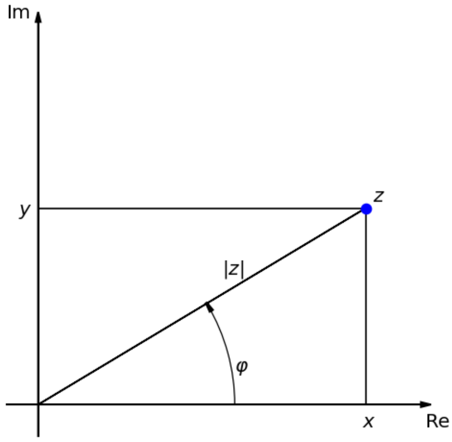

Abbildung 5: Polarkoordinaten

Nach dem **Satz von Pythagoras** gilt

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi \text{ und } \frac{y}{|z|} = \sin\varphi.$$

Also ist $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Man definiert für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Aus dem **Additionstheorem** für sinus und cosinus

$$\begin{aligned} \sin(\varphi \pm \psi) &= \sin\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\sin\psi, \\ \cos(\varphi \pm \psi) &= \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi \end{aligned}$$

folgt die Rechenregel

$$e^{i(\varphi+\psi)} = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$$

$$\begin{aligned} &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= e^{i\varphi}e^{i\psi}. \end{aligned}$$

Ist $z \in \mathbb{C}$, so nennt man jede reelle Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

ein **Argument** von z. Ist φ ein Argument von z, so erhält man jedes andere Argument von z als

$$\varphi + 2\pi k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Man multipliziert zwei komplexe Zahlen $z = |z|e^{i\varphi}, w = |w|e^{i\psi}$

$$zw = (|z|e^{i\varphi})(|w|e^{i\psi}) = |zw|e^{i(\varphi+\psi)},$$

indem man ihre Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

2.6 Beispiele

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$,

(b) $(e^{2\pi i\frac{k}{n}})^n = e^{2\pi ik} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$ für $k, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$,

(c) $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$,

(d) $e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = e^{i(\varphi-\varphi)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$,

(e) $\overline{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$.

Die Rechenregel aus Teil (a) nennt man die **Formel von Moivre**. Man kann zeigen, dass es genau n Zahlen in $\mathbb{C}$ gibt, nämlich

$$e^{2\pi i\frac{k}{n}} \qquad (k = 0, \ldots, n-1),$$

mit $z^n = 1$. Diese Zahlen heißen die n-ten **Einheitswurzeln**.

3 Kombinatorik

Typische Fragen, die man mit Mitteln der Kombinatorik behandeln kann, sind:

(a) Wieviele Wörter aus 5 Buchstaben kann man aus den 26 Buchstaben des Alphabetes bilden?

(b) An einem Pferderennen nehmen 8 Pferde teil. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze?

(c) Man untersucht Ratten auf eine gewisse Krankheit. Man wählt aus 100 Ratten eine Stíchprobe von 20 aus. Auf wieviele Arten ist dies möglich?

3.1 Variationen der Länge k mit Wiederholung (Frage (a))

Für jede der 26 Möglichkeiten, den 1. Buchstaben zu wählen, gibt es 26 Möglichkeiten, den 2. Buchstaben zu wählen. Zu jeder der 26^2 Möglichkeiten, die beiden ersten Buchstaben zu wählen, gibt es 26 Möglichkeiten, den 3. Buchstaben zu wählen, ...
Insgesamt gibt es $26^5 = 11.881.376$ Möglchkeiten, die 5 Buchstaben zu wählen.

Prinzip: Aus einer Menge A aus n Elementen werden alle Folgen der Länge k

$$(a_1, \dots, a_k) \text{ mit } a_i \in A \text{ für } i = 1, \dots, k$$

gebildet. Dafür gibt es n^k Möglichkeiten.

Anwendung: Sei $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ eine k-elementige Menge. Wieviele Teilmengen besitzt A?

Idee: Jede Teilmenge B von A ist eindeutig bestimmt dadurch, dass man für jedes $a_i \in A$ angibt, ob es zu B gehört oder nicht. Also ist die

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Teilmengen von} A \\ = \; & \text{Anzahl der Folgen der Länge } k \text{ aus einer 2-elementigen Menge} \\ = \; & 2^k. \end{aligned}$$

Satz 3.1. *Eine k-elementige Menge hat genau 2^k Teilmengen.*

3.2 Variationen der Länge k ohne Wiederholung (Frage (b))

Beim Pferderennen mit 8 Pferden gibt es für

Platz 1: 8 Möglichkeiten,

$$\text{Platz 2: 7 Möglichkeiten,}$$
$$\text{Platz 3: 6 Möglichkeiten.}$$

Insgesamt gibt es $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ Möglichkeiten für die ersten drei Plätze.

Prinzip: Sei A eine n-elementige Menge. Dann ist die Anzahl aller Folgen der Länge k ($k \leq n$)

$$(a_1, \ldots, a_k) \text{ mit } a_i \in A \text{ für } i = 1, \ldots, k,$$

wenn keine Wiederholungen erlaubt sind, gleich

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

3.3 Permutationen (Speziellfall von 3.2 mit $k = n$)

Auf wieviele Arten kann man n Objekte ohne Wiederholung auf n Plätze verteilen? Nach Abschnitt 3.2 gibt es dazu

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{Möglichkeiten.}$$

Man definiert $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (gelesen als n-Fakultät), $0! = 1$.

3.4 Ungeordnete Stichproben (Frage(c))

Wie viele k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge gibt es?

Idee: Mit den Ergebnissen aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 erhält man:

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl der Folgen der Länge } k \text{ ohne Wiederholung aus einer } n\text{-elementigen Menge} \\
&\qquad = \quad \text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } \{a_1, \ldots, a_n\} \times k! \\
&\qquad = \quad n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).
\end{aligned}$$

Also ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gegeben durch

$$\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Definition 3.2. Die Zahlen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; (k = 0, \ldots, n), \quad \binom{n}{k} = 0 \; (k > n)$$

heißen **Binomialkoeffizienten**.

Satz 3.3. *Eine n-elementige Menge hat $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.*

Rechenregeln 3.4. Es gilt für $k = 0, \dots, n$

(a) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$,

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

(c) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Dabei folgt (c) aus

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

3.5 Pascalsches Dreieck (Blaise Pascal, 1623-1662)

Man kann die Binomialkoeffizieten $\binom{n}{k}$ $(k = 0, \dots, n)$ nacheinander für $n = 0, 1, 2, \dots$ nach folgendem Schema berechnen (siehe Abbildung 6):

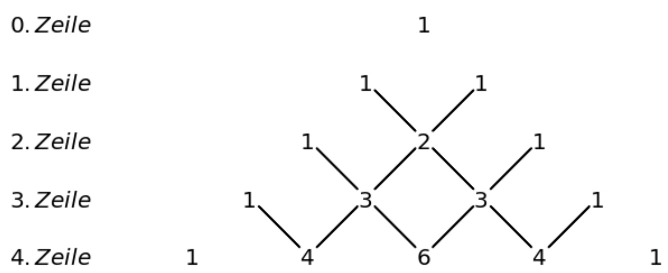

Abbildung 6: Pascalsches Dreieck

In der n-ten Zeile steht an der k-ten Stelle beginnend mit $k = 0$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$. Nach Regel 3.4(c) ist das $(k+1)$-te Element in der $(n+1)$-te Zeile die Summe des k-ten und $(k+1)$-ten Elementes der n-ten Zeile.

3.6 Summen und Produktzeichen

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \binom{3}{3}x^3 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 + \binom{3}{0}y^3, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Vermutung: Für $n \in \mathbb{N}$ könnte gelten

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{0} y^n.$$

Als hilfreiche Abkürzung führt man **Summen-** und **Produktzeichen** ein. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und $a_m, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ definiert amn

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Es gelten die folgenden nützlichen Regeln:

- $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$
- $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j),\ c(\sum_{j=m}^{n} a_j) = \sum_{j=m}^{n} c a_j.$

Entsprechend definiert man das **Produktzeichen**:

$$\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Der Bequemlichkeit halber definiert man für $n < m$:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = 0, \ \prod_{j=m}^{n} a_j = 1.$$

3.7 Beweise durch Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

- $A(n_0)$ richtig ist,
- $A(n+1)$ richtig ist, wenn $A(n)$ richtig ist.

Die Gültigkeit solcher Beweise beruht auf dem **Peano-Axiom**:
Zu einer Menge $M \subset \mathbb{N}$ gehören alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, wenn

- $n_0 \in M$ gehört und
- für jedes $n \in M$ auch $n+1$ zu M gehört.

3.8 Binomischer Lehrsatz

Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Beweis durch Induktion:
(IA) (Induktionsanfang) $n = 0$:

Es ist $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^{0-0}$.

(IS) (Induktionsschritt) $n \to n+1$:

Sei die Behauptung gezeigt für n. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^jy^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^{j+1}y^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^jy^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1}x^jy^{n+1-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^jy^{n+1-j} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)x^jy^{n+1-j} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j}x^jy^{n+1-j}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt Regel 3.2(c) benutzt.

Spezialfälle: Es gilt

(a) $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$,

(b) $0 \;\; = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^j$ für $n \geq 1$.

4 Ungleichungen

Auf $\mathbb{R}$ ist eine **Anordnung** gegeben, das heißt gewisse Elemente sind als positiv ausgezeichnet (geschrieben als $x > 0$) so, dass gilt:

(1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der Fälle $a > 0, a = 0, -a > 0$.

(2) Für $a, b > 0$ sind auch $a + b, ab > 0$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ schreibt man

- $a > b$ oder $b < a$, falls $a - b > 0$ ist,
- $a \geq b$ oder $b \leq a$, falls $a - b > 0$ oder $a = b$ ist,
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 0\}, \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$.

4.1 Rechenregeln für Ungleichungen

. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $a \geq b$ und $b \geq c \Rightarrow a \geq c$,

(ii) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$,

(iii) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$,

(iv) $a \leq b$ und $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$,
$a \leq b$ und $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc \quad (ac - bc = (b - a)(-c) \geq 0)$.

(v) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$,

(vi) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.

Ersetzt man überall “ $\geq$ “ durch “ $>$ “ und “ $\leq$ “ durch “ $<$ “, so bleibt alles richtig.

4.2 Zinseszinsrechnung

(a) **Einmalige Anlage**

Auf welchen Betrag ist ein Anfangskapital K bei $p\%$ Zinsen pro Jahr und Zinsansammlung nach n Jahren angewachsen? Das Kapital beträgt nach dem

$$\begin{aligned}
1.\text{ Jahr} \quad &: \quad K_1 = K + \tfrac{p}{100}K = K(1 + \tfrac{p}{100}).\\
2.\text{ Jahr} \quad &: \quad K_2 = K_1(1 + \tfrac{p}{100}) = K(1 + \tfrac{p}{100})^2\\
&\dots\\
n.\text{ Jahr} \quad &: \quad K_n = K(1 + \tfrac{p}{100})^n.
\end{aligned}$$

Mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ folgt $K_n = Kq^n$.

(b) **Ratensparvertrag**

Eine Sparrate R wird m-mal im Jahr jeweils am Ende des Jahresabschnitts angelegt zu einem Jahreszins von $p\%$. Die Zinsen werden nicht ausgezahlt, sondern angesammelt. Das Guthaben beträgt nach dem

1. Jahresabschnitt: $\quad R$

2. Jahresabschnitt:

$$\begin{aligned} & R + R + R\tfrac{p/m}{100} = R + R(1 + \tfrac{p/m}{100}) \\ = \quad & R + Rq = R(1+q) = R\tfrac{q^2-1}{q-1}, \end{aligned}$$

wobei $q = 1 + \frac{p/m}{100}$ als **Zinsfaktor** bezeichnet wird.

3. Jahresabschnitt:

$$\begin{aligned} & R + (R + Rq)q = R + Rq + Rq^2 \\ = \quad & R(1 + q + q^2) = R\tfrac{q^3-1}{q-1} \end{aligned}$$

n. Jahresabschnitt:

$$R(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = R\sum_{j=0}^{n-1} q^j = R\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Satz 4.1. *Für jedes $q \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(q-1)\sum_{j=0}^{n-1} q^j = q^n - 1.$$

Idee: Ausmultiplizieren ergibt

$$(q-1)\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \sum_{j=0}^{n-1} q^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} q^j = q^n - 1.$$

4.3 Die Bernoullische Ungleichung

Ein einmalig angelegter Geldbetrag K wird bei $p\%$ ($p > 0$) Jahreszins beliebig groß, wenn man nur lange genug wartet. Dies ist gar nicht so einfach zu zeigen. Es war

$$K_n = Kq^n \text{ mit } q = 1 + \frac{p}{100} > 1$$

das Kapital nach n Jahren.

Satz 4.2. *(Bernoullische Ungleichung, Jacob Bernoulli 1654-1725)*
Für $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. (Induktion).

(IA) $n = 0$:

Offensichtlich ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$.

(IS) $n \to n+1$:

Sei die Behauptung gezeigt für n. Dann gilt

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Das erste Ungleichheitszeichen folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Rechenregel 4.1(iv), das zweite mit den Regeln 4.1(ii) und 4.1(iii). $\square$

Für unser Beispiel $K_n = Kq^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ bedeutet dies: Ist $M \in \mathbb{R}$, so wird $K_n \geq K(1 + \frac{np}{100}) > M$ für

$$n > \frac{100}{p}\,(\frac{M}{K} - 1).$$

4.4 Intervallschreibweisen

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ sei

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$$

und für $a < b$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\},$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\},$$

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}.$$

Man nennt das erste Intervall ein abgeschlossenes, das letzte Intervall ein offenes Intervall und die beiden mittleren halboffene Intervalle. Statt $]a,b]$, $[a,b[\ \ldots$ schreibt man oft auch $(a,b]$, $[a,b)\ \ldots$.

5 Konvergenz und Stetigkeit

5.1 Konvergenz von Folgen

Eine **Folge in einer Menge** M ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to M,\ n \mapsto x_n.$$

Abkürzend schreibt man eine solche Abbildung als $(x_n)_{n\geq 0}$ oder $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Man lässt auch Folgen $(x_n)_{n\geq n_0}$ mit anderen Anfangsgliedern zu.

Nähert sich eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) für große n beliebig gut einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$), so nennt man die Folge konvergent gegen x.

Konvergenz von Folgen benötigt man etwa zur:

(a) **Berechnung von Tangenten**

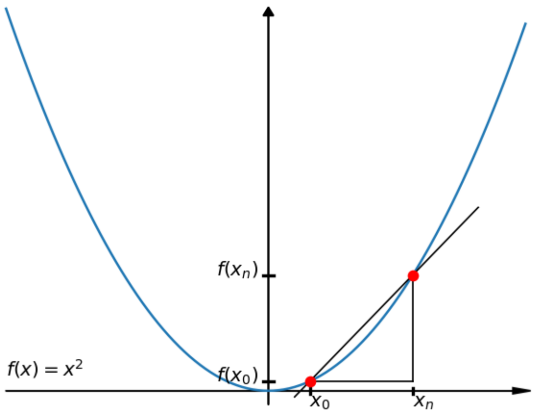

Abbildung 7: Tangentensteigung

Für jede Folge $(x_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x_0$ gilt

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0} = x_n + x_0 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 2x_0.$$

(b) **Berechnung von Flächen**

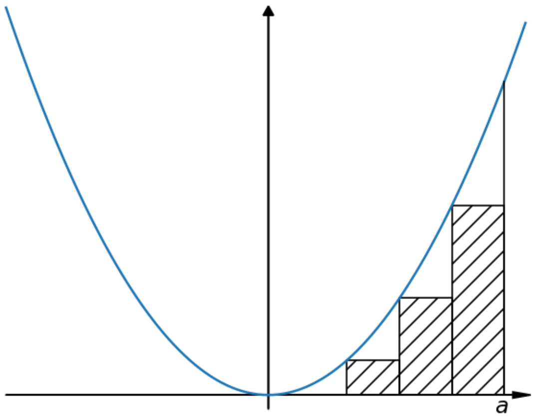

Abbildung 8: Flächenberechnung

Man ersetzt die Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[0, a[$ durch die stückweise konstante Funktion **(Treppenfunktion)**

$$f_n(x) = f(i\frac{a}{n})$$

für $x \in [i\frac{a}{n}, (i+1)\frac{a}{n}[$ und $i = 0, \dots, n-1$. Die Flächen unter dem Graphen von f_n

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}a)(\frac{i+1}{n}a - \frac{i}{n}a) = (\frac{a}{n})^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= (\frac{a}{n})^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = a^3 \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

streben für $n \to \infty$ gegen die Fläche unter den Graphen von f über dem Intervall $[0, a]$.

Beispiele von Folgen

(a) $(2n+1)_{n\geq 0} = (1, 3, 5, 7, \dots)$,

(b) $(2^n)_{n\geq 0} = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$,

(c) $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$,

(d) $(\sum_{j=0}^{n-1} q^j)_{n\geq 1} = (\frac{q^n-1}{q-1})_{n\geq 1}$ für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5.2 Konvergenz

Definition 5.1. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$) **konvergiert** gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$), falls für jedes $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Abkürzend hierfür schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } (a_n) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a.$$

Geometrisch bedeutet dies: In jeder noch so kleinen Umgebung von a liegen alle bis auf höchstens endlich viele Anfangsglieder der Folge. Umgebungen von $a \in \mathbb{R}$ sind Intervalle der Form

$$]a-\epsilon, a+\epsilon[\qquad (\epsilon > 0),$$

Umgebungen von $a \in \mathbb{C}$ sind Kreisscheiben

$$\{z \in \mathbb{C} |\ |z-a| < \epsilon\} \qquad (\epsilon > 0)$$

um a mit Radius $\epsilon > 0$ in der komplexen Zahlenebene. Insbesondere sind konvergente Folgen (a_n) immer **beschränkt**, das heißt es gibt ein $c > 0$ mit $|a_n| \leq c$ für alle n.

Beispiele 5.2. (a) Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Um dies zu begründen, genügt es zu $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt für $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

(b) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ (äquivalent $q \in]-1, 1[$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Dies ist offensichtlich für $q = 0$. Ist $0 < |q| < 1$, so existiert ein $x > 0$ mit

$$\frac{1}{|q|} = 1 + x.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 4.2)

$$(\frac{1}{|q|})^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 x > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$(\frac{1}{|q|})^n \geq 1 + nx \geq 1 + n_0 x > \frac{1}{\epsilon}$$

und damit

$$|q^n - 0| = |q|^n < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Ganz genauso folgt auch für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$, dass

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

in $\mathbb{C}$ gilt.

(c) Indem man das Ergebnis von Teil (b) und die Grenzwertsätze (Satz 5.5) benutzt, sieht man, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ oder genauso auch für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Um überhaupt von dem Grenzwert einer Folge sprechen zu können, muss man wissen:

Satz 5.3. *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Wären etwa a, b Grenzwerte von (a_n) mit $a \neq b$, so wäre

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{2} > 0$$

und es müsste ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ und } |a_n - b| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann wäre aber für $n \geq n_0$

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a - b|.$$

Das ist unmöglich!

Beispiel 5.4. Darf man folgendermaßen rechnen

$$\frac{(n+2)(2n+3)}{n^2 + 3n + 1} = \frac{(1 + \frac{2}{n})(2 + \frac{3}{n})}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{(1+0)(2+0)}{1 + 0 + 0} = 2?$$

Ja, denn es gelten die Grenzwertsätze in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$.

Satz 5.5. (Grenzwertsätze)
Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$) und seien $a, b \in \mathbb{R}$ (bzw. $a, b \in \mathbb{C}$) mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,

(iii) ist $b_n \neq 0$ für alle n und ist $b \neq 0$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Idee für Summen:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Dreiecksungleichung (Regel 2.4)

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Ist $\epsilon > 0$ beliebig, so gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon/2 \text{ für } n \geq n_1 \text{ und } |b_n - b| < \epsilon/2 \text{ für } n \geq n_2.$$

Für alle $n \geq \max(n_1, n_2)$ gilt dann

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Die Begründung für Produkte beruht auf dem Trick:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$= |(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a|\ |b_n - b| + |a_n - a|\ |b| + |a|\ |b_n - b|.$$

Alle drei Summanden werden kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ für genügend große n.

Definition 5.6. Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert, wenn für jede reelle Zahl $R > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > R$ für alle $n \geq n_0$. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert definitionsgemäß uneigentlich gegen $-\infty$, wenn für jede reelle Zahl $R > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < -R$ für alle $n \geq n_0$.

5.3 Stetige Funktionen

Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine Funktion zwischen Mengen X und Y. Man nennt X den **Definitionsbereich**, Y den **Wertebereich** von f und

$$f(X) = \{f(x) |\ x \in X\} \subset Y$$

das **Bild** von f.

Beispiele 5.7. (a) Für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nennt man

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

eine **Polynomfunktion**. Entsprechend kann man für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ die komplexe **Polynomfunktion**

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

definieren.

(b) In der Schule definiert man geometrisch die Winkelfunktionen

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ und } \tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto a^x \qquad$ (für $a > 0$)

(d) $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \log x$.

$\mathbb{R}$-wertige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ kann man

(i) addieren: $f, g : X \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

(ii) multiplizieren: $fg : X \to \mathbb{R}, (fg)(x) = f(x)g(x)$,

(iii) dividieren: $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Genauso kann man $f+g, fg, \frac{f}{g} : X \to \mathbb{C}$ für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ definieren.

Definition 5.8. (Stetigkeit) Sei $D \subset \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in D$. Man nennt f

(i) **stetig in** a, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ ist für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,

(ii) **stetig**, wenn f stetig in jedem Punkt $a \in D$ ist.

Genauso definiert man die Stetigkeit reellwertiger Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Mengen $D \subset \mathbb{R}$.

Beispiele 5.9. (1) $f : I = [-1, 1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = -1$ für $-1 \leq x \leq 0, \ f(x) = 1$ für $0 < x \leq 1$,

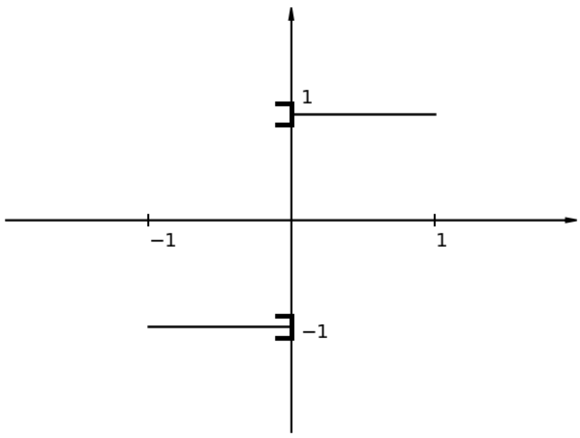

Abbildung 9: Unstetigkeitsstellen

ist stetig in jedem Punkt $a \in I \setminus \{0\}$, aber nicht in 0:

$$(\frac{1}{n}) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0, \text{ aber } (f(\frac{1}{n})) = (1) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1 \neq f(0).$$

(2) $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ ist stetig (genauso wie $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$(z_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \text{ in } \mathbb{C} \Rightarrow (\mathrm{id}(z_n)) = (z_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a = \mathrm{id}(a).$$

(3) Jede konstante Funktion $f : D \to \mathbb{C}, f(z) = c$ ($c \in \mathbb{C}$ fest) ist stetig:

$$(x_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \text{ in } D \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(a).$$

(4) Jede Polynomfunktion $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$. Das gleiche gilt für reelle Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$. Dies folgt aus den Teilen (2) und (3) mit dem nächsten Satz.

Satz 5.10. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind auch*

$$f + g,\ \ fg,\ \ \frac{f}{g}\ \ (\textit{falls } g(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in D)$$

stetig in $a \in D$. Das gleiche gilt für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ auf Mengen $D \subset \mathbb{C}$.

Idee: Dies folgt direkt mit der Definition der Stetigkeit aus den Grenzwertsätzen für Folgen (Satz 5.5). Sind etwa $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so folgt für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),\ \lim g(x_n) = g(a).$$

Mit den Grenzwertsätzen für Quotientenfolgen (Satz 5.5(iii)) erhält man

$$(\frac{f}{g})(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{f(a)}{g(a)} = (\frac{f}{g})(a).$$

Also ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.

Beispiel 5.11. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$ genau dann, wenn die beiden Funktionen

$$D_- = \{x \in D |\ x \leq a\} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x) \ \text{ und } \ D_+ = \{x \in D |\ x \geq a\} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$$

stetig in a sind. Ist $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in D mit Limes a, so sind $(y_n)_{n\geq 0} = (\min(x_n, a))_{n\geq 0}$ und $(z_n)_{n\geq 0} = (\max(a, x_n))_{n\geq 0}$ Folgen in D_- bzw. D_+ mit Limes a. Nach Voraussetzung konvergieren $(f(y_n))_{n\geq 0}$ und $(f(z_n))_{n\geq 0}$ gegen $f(a)$. Wegen $f(x_n) \in \{f(y_n), f(z_n)\}$ konvergiert auch $(f(x_n))_{n\geq 0}$ gegen $f(a)$.
Als Anwendung erhält man etwa sofort, dass die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \qquad f(x) = x \quad (1 < x \leq 2)$$

stetig ist auf dem ganzen Intervall $[0, 2]$.

Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig. Genauer gilt:

Satz 5.12. *Sind $f : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf Mengen $D, E \subset \mathbb{R}$ und gilt $f(D) \subset E$, so ist auch*

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x))$$

stetig. Alles bleibt richtig für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.

Begründung: Ist (x_n) eine Folge in D mit $(x_n) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \in D$, so ist $(f(x_n))$ eine Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Da g nach Voraussetzung stetig in $f(a)$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} g \circ f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = g \circ f(a).$$

Beispiel 5.13. Als Polynomfunktion ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2 + 1$$

stetig. Man kann zeigen (Kapitel 8), dass auch die Wurzelfunktion

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist. Nach Satz 5.12 ist die Komposition

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

stetig.

6 Konvergenzkriterien und stetige Funktionen auf Intervallen

6.1 Cauchy-Folgen

In der Mathematik konstruiert man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ so, dass

- jedes $x \in \mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge in $\mathbb{Q}$ ist (Man sagt: $\mathbb{Q}$ ist **dicht** in $\mathbb{R}$),
- das **Cauchysche Konverenzkriterium** gilt:

Satz 6.1. (Cauchy-Kriterium) *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$(*) \begin{cases} \text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ |a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N. \end{cases}$$

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), die die Bedingung $(*)$ erfüllt, heißt **Cauchy-Folge**. Also kann man Satz 6.1 auch so formulieren:

Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Derselbe Satz gilt auch in $\mathbb{C}$.
Mit dem Cauchy-Kriterium kann man zeigen:

Satz 6.2. (Intervallschachtelungsprinzip) *Ist $(I_k)_{k\geq 1}$ eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ mit*

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0,$$

dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in I_k$ für alle $k \geq 1$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = a.$$

Idee: Man kann zeigen, dass (a_k) und (b_k) Cauchy-Folgen sind und dass die Behauptung gilt für

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

6.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

Satz 6.3. (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei*

$$f(a) \leq y \leq f(b) \qquad (\text{oder } f(a) \geq y \geq f(b)).$$

Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Idee: Sei $f(a) < y < f(b)$.

$$\begin{aligned} &\text{Ist } f(\tfrac{a+b}{2}) \leq y \quad , \quad \text{setze } a_1 = \tfrac{a+b}{2}, b_1 = b. \\ &\text{Ist } f(\tfrac{a+b}{2}) > y \quad , \quad \text{setze } a_1 = a, b_1 = \tfrac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

In jedem Fall ist

$$f(a_1) \leq y \leq f(b_1), \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Fortsetzen des Verfahrens führt zu Folgen $(a_k), (b_k)$ wie in Satz 6.2 mit

$$f(a_k) \leq y \leq f(b_k) \text{ für alle } k.$$

Nach Satz 6.2 existiert $x = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$. Da f stetig in x ist, folgt

$$y \leq \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq y.$$

Beispiel 6.4. Für $c > 0$ und $n \geq 1$ existiert genau ein $x > 0$ mit

$$x^n = c.$$

Eindeutigkeit: Ist $0 < x < y$, so ist $x^n < y^n$.

Existenz: Wegen $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k})^n = 0$ gibt es ein $k > c$ mit $(\frac{1}{k})^n < c$.

$$\Rightarrow (\frac{1}{k})^n < c < k^n.$$

Nach dem **Zwischenwertsatz** angewendet auf $f : [\frac{1}{k}, k] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ gibt es ein $x \in [\frac{1}{k}, k]$ mit $f(x) = c$.

Definition 6.5. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $m \in D$ heißt **Minimum** (**Maximum**) von D (geschrieben: $m = \min D$ bzw. $m = \max D$), falls gilt

$$x \geq m \text{ für alle } x \in D \qquad (\text{bzw. } x \leq m \text{ für alle } x \in D)$$

Beispiel 6.6. Es ist $0 = \min[0,1], 1 = \max[0,1]$, aber die Menge $]0,1[$ besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum.

Satz 6.7. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren*

$$\min\ f([a,b]) \ \ \textit{und} \ \ \max\ f([a,b]),$$

das heißt es gibt $x_0, y_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) \textit{ für alle } x \in [a,b].$$

Insbesondere bildet f das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ ab auf das abgeschlossene Intervall

$$f([a,b]) = [f(x_0), f(y_0)].$$

Beispiel 6.8. Der Satz gilt nicht für stetige Funktionen auf Intervallen, die nicht abgeschlossen sind. So hat etwa für die stetige Funktion

$$f :]0,1[\to \mathbb{R}, f(x) = x$$

die Menge $f(]0,1[) =]0,1[$ weder ein Minimum noch ein Maximum.

6.3 Häufungspunkte und Teilfolgen

Definition 6.9. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt

- **nach oben beschränkt**, fall ein $A \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq A$ für alle n,
- **nach unten beschränkt**, falls eine $B \in \mathbb{R}$ existiert mit $B \leq a_n$ für alle n,
- **beschränkt**, falls (a_n) nach oben und unten beschränkt ist,
- **monoton wachsend** (**fallend**), falls $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) ist für alle n,
- **streng monoton wachsend** (**fallend**), falls $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) ist für alle n.

Nützliche Beobachtung: Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn die Folge $(|a_n|)_{n \geq 0}$ nach oben beschränkt ist.

Beispiele 6.10. (a) Die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1}$ ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt. Die Folgen $(a_n)_{n \geq 0} = ((-1)^n)_{n \geq 0}$ und $(a_n)_{n \geq 1} = (\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ sind beschränkt.

(b) Konvergente Folgen sind immer beschränkt (Ist $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, so gilt $a - 1 < a_n < a + 1$ für alle bis auf endliche viele n), aber beschränkte Folgen brauchen nicht zu konvergieren.

In der Mathematik zeigt man mit dem Intervallschachtelungsprinzip:

Satz 6.11. (Bolzano-Weierstraß) *Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es mindestens ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $\epsilon > 0$ die Menge*

$$\{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\}$$

unendlich ist.

In diesem Fall heißt die Zahl a **Häufungspunkt** von (a_n). Also gilt:

“Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt“.

Zum Beispiel hat die Folge $a_n = (-1)^n$ die Häufungspunkte $+1, -1$.

Folgerung 6.12. *Jede monoton wachsende (oder fallende) beschränkte Folge (a_n) konvergiert.*

Idee: Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge (a_n) einen Häufungspunkt a. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$. Im monoton wachsenden Fall folgt

$$a_{n_0} \leq a_n \leq a \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wäre $a_N > a$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so würde für $\epsilon = a_N - a > 0$ und alle $n \geq N$ gelten:

$$a_n \geq a_N = a + \epsilon,$$

und $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ würde höchstens $a_0, \ldots, a_{N-1}$ enthalten.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sind $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürliche Zahlen, so heißt $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele 6.13. $(a_n)_{n\geq 0} = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ hat die Häufungspunkte ± 1 und

$$\begin{aligned} ((-1)^{2i})_{i\geq 0} &= (1, 1, 1, \ldots) \\ ((-1)^{2i+1})_{i\geq 0} &= (-1, -1, -1, \ldots) \end{aligned}$$

sind Teilfolgen (wähle $n_i = 2i$ bzw. $n_i = 2i+1$) mit Grenzwerten $+1$ bzw. -1. Dies ist kein Zufall!

Man kann zeigen:

Satz 6.14. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$.*

(a) Die Zahl a ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ genau dann, wenn eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\geq 0}$ von $(a_n)_{n\geq 0}$ existiert mit $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$.

(b) Konvergiert $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen a, so gilt dasselbe für jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$.

(c) Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt, so hat $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Teilfolge.

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn $(a_n)_{n\geq 0}$ beschränkt ist und a der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist.

7 Unendliche Reihen

Paradoxon von Zenon (Achilles und die Schildkröte):

Achilles ist n-mal so schnell wie die Schildkröte. Die Schildkröte erhält den Vorsprung: $a > 0$. Sei $t > 0$ die Zeit, die Achilles für die Strecke a benötigt. Zum Zeitpunkt t hat Achilles die Strecke a zurückgelegt, die Schildkröte hat den Vorsprung $\frac{a}{n}$. Zum Zeitpunkt $t + \frac{t}{n}$ hat Achilles die Strecke $a + \frac{a}{n}$ zurückgelegt, die Schildkröte hat den Vorsprung $\frac{a}{n^2}$ ... Zum Zeitpunkt $t + \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2} + \ldots + \frac{t}{n^k}$ hat Achilles die Strecke

$$a + \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + \ldots + \frac{a}{n^k}$$

zurückgelegt, die Schildkröte hat den Vorsprung $\frac{a}{n^{k+1}}$. Achilles wird die Schildkröte also nie einholen oder?

Zenon geht von der Annahme aus, dass

$$t + \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2} + \ldots = \infty$$

ist. Wir wissen es bereits besser. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$t_k = t + \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2} + \ldots + \frac{t}{n^k} = t\sum_{j=0}^{k}(\frac{1}{n})^j = t\frac{1-(\frac{1}{n})^{k+1}}{1-\frac{1}{n}} \leq t\frac{1}{1-\frac{1}{n}}.$$

Es gilt sogar

$$t_k = t\frac{1-(\frac{1}{n})^{k+1}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow{k} \frac{t}{1-\frac{1}{n}}.$$

Zu diesem Zeitpunkt hat Achilles die Schildkröte eingeholt.

7.1 Konvergente Reihen

Prinzip: Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Man erhält eine neue Folge $(s_n)_{n\geq 0}$, indem man

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad (n\text{-te } \textbf{Partialsumme})$$

definiert. Man schreibt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (s_n)_{n\geq 0}$ für die Folge der Partialsummen und nennt dies die **Reihe** der a_n $(n \in \mathbb{N})$.

Definition 7.1. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge und

$$(s_n)_{n\geq 0} = (a_0 + \ldots + a_n)_{n\geq 0}$$

die Folge der Partialsummen. Falls $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existiert, schreibt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

und nennt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergent** mit **Reihenwert** s.

Beispiele 7.2. (1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Wir wisssen (Beispiel 5.2(b)):

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Mit der geometrischen Summenformel (Satz 4.1) und den Grenzwertesätzen (Satz 5.5) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}.$$

Also gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Genauso folgt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Man nennt diese Reihen die **geometrischen Reihen** für x bzw. z.

(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (**harmonische Reihe**) divergiert, das heißt konvergiert nicht. Betrachte

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für $m > N$

$$|s_{2m} - s_m| = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} \geq m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Also ist für $\epsilon = \frac{1}{2}$ das Cauchy-Kriterium (Satz 6.1) für die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 1}$ verletzt.

(3) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, denn für $\epsilon > 0$ gilt für genügend große n nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.1)

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon.$$

Umgekehrt zeigt Beispiel (2), dass man aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht auf die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schließen kann.

Rechenregeln 7.3. *Falls* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ *ist, gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = ca \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Dies folgt aus den Grenzwertsätzen (Satz 5.5):

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{N} a_n + \sum_{n=0}^{N} b_n \overset{N}{\longrightarrow} a + b, \ldots$$

Definition 7.4. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Man schreibt hierfür auch: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

7.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$. Da für $n \geq m > 0$ gilt

$$s_n - s_{m-1} = a_m + \ldots + a_n,$$

liefert das Cauchy-Kriterium (Satz 6.1) angewendet auf $(s_n)_{n\geq 0}$ ein entsprechendes Konvergenzkriterium für Reihen.

Cauchy-Kriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$$

für alle $n \geq m \geq N$.

Als Folgerung erhält man viele nützliche Konvergenzkriterien.

Satz 7.5. *Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent und für die Reihenwerte gilt*

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Dies folgt mit dem Cauchy-Kriterium für Reihen und der Dreiecksungleichung, denn ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so gilt für $n \geq m$ groß genug

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

Beispiel 7.6. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nicht absolut (Harmonische Reihe), aber sie ist konvergent nach dem Cauchy-Kriterium:

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k}| &= |(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}) + (\tfrac{1}{n+3} - \tfrac{1}{n+4}) + (\ldots) + \ldots| \\ &= \tfrac{1}{n+1} - (\tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{n+3}) - (\tfrac{1}{n+4} - \tfrac{1}{n+5}) - (\ldots) - \ldots \leq \tfrac{1}{n+1} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Satz 7.7. (Majorantenkriterium) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \geq N$, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$. Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent.*

In der Situation von Satz 7.7 folgt also aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die absolute Konvergenz und damit auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Man beachte, dass das Abändern endlich vieler Folgenglieder nichts an der Konvergenz oder absoluten Konvergenz einer Reihe ändert.

Beispiele 7.8. (a) Man kann zeigen (Aufgabe), dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert. Da

$$\frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k^2+k} = \frac{2}{k(k+1)} \qquad \text{für alle } k \geq 1.$$

für $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$ und alle $k \geq 1$, gilt, konvergieren nach dem Majorantenkriterium auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2).$$

(b) **(Minorantenkriterium)** Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$, so folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Denn nach Folgerung 6.12 konvergiert eine Reihe mit nicht-negativen Summanden genau dann, wenn ihre Partialsummenfolge beschränkt ist. Da nach Beispiel 7.2(2) die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium etwa auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k}$.

Satz 7.9. (Quotientenkriterium) *(a) Ist $q \in [0, 1[$ und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n| \text{ für alle } n \geq N,$$

oder sind alle $a_n \neq 0$ und existiert

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \in [0, 1[,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
(b) Sind alle $a_n \neq 0$ und existiert

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \in]1, \infty[,$$

so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Idee: Der erste Teil von (a) folgt aus dem Majorantenkriterium (Satz 7.7) und der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} q^k |a_N|$, denn es ist

$$|a_{N+k}| \leq q|a_{N+k-1}| \leq q^2|a_{N+k-2}| \leq \ldots \leq q^k|a_N|$$

für alle k. Also konvergiert $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}|$ und damit auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Beispiel 7.10. Für $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} / \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^2 \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \in [0, 1[.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent nach dem Quotientenkriterium.

Für absolut konvergente Reihen gilt auch ein Produktsatz. Man muss das Produkt nur vorsichtig genug bilden.

Satz 7.11. (Cauchy-Produkt) *Sind $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so ist auch*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = ab$$

absolut konvergent.

Beispiel 7.12. (Exponentialreihe)
Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$$

absolut. Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$E(0) = 1,\ E(x)E(y) = E(x+y),\ E(-x) = \frac{1}{E(x)}$$

und $E(x) \in \mathbb{R}_+^*$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Konvergenz folgt aus dem Quotientenkriterium

$$|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{x^n}{n!}| = \frac{|x|}{n+1} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \in [0,1[.$$

Es ist $E(0) = 1$ und die Cauchy-Produktformel liefert

$$E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n} n!\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

Hierbei haben wir den bionomischen Lehrsatz (Satz 3.8) benutzt. Mit $y = -x$ folgt

$$E(x)E(-x) = E(x + (-x)) = E(0) = 1\ (\Rightarrow E(x) \neq 0 \text{ für alle } x).$$

Insbesondere ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$E(x) = E(\frac{x}{2})^2 > 0.$$

Ganz genauso folgt, dass auch $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine (komplexwertige) Funktion definiert mit $E(0) = 1$,

$$E(z)E(w) = E(z+w),\ E(-z) = \frac{1}{E(z)} \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

8 Spezielle Funktionen

8.1 Lineare Funktionen, Geradengleichung, Regressionsgeraden

Der Graph der Funktion

$$y = ax + b \qquad \text{(Geradengleichung)}$$

ist eine Gerade. Dabei ist $b = y(0)$ die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse und

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{d}{c}$$

die Steigung.

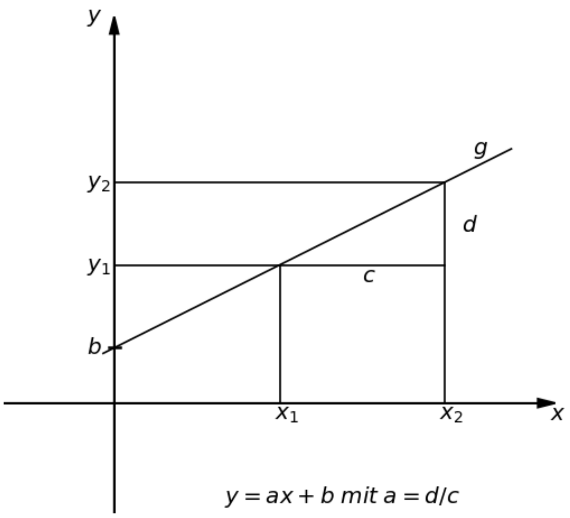

Abbildung 10: Geradengleichung

Spezialfälle:

(1) $b = 0$

Man erhält eine **Nullpunktsgerade**. In diesem Fall wächst y **proportional** zu x mit **Proportionalitätsfaktor** a.

(2) $a = 0$

Man erhält eine Parallele zur x-Achse. In diesem Fall ist $y \equiv \text{const.} = b$.

Durch zwei Punkte $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$ geht genau eine Gerade. Nach eventuellem Drehen der Koordinatenachsen darf man $x_1 \neq x_2$ annehmen. Die Gleichung der gesuchten Geraden durch die beiden

Punkte ist $y = ax + b$ mit

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } b = y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

Parametrisierung von Geraden: Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ ist eindeutig bestimmt durch die Angabe eines Punktes $(x_0, y_0) \in G$ und eines Richtungsvektors $(c, d) \neq (0, 0)$:

$$G = \{(x_0, y_0) + t(c, d) |\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Wie hängen diese beiden Darstellungen zusammen? Für $c \neq 0$ und

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(c, d)$$

mit $t \neq 0$ ist

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{t\ d}{t\ c} = \frac{d}{c} \qquad \text{(Steigung von } G\text{)}.$$

Der Punkt $(x, y) \in G$ mit $x = 0$ entspricht dem Parameter

$$t = -\frac{x_0}{c} \Rightarrow y = y_0 - \frac{x_0}{c} d.$$

Die zugehörige Geradengleichung ist

$$y = \frac{d}{c} x + (y_0 - \frac{x_0}{c} d).$$

Regressionsgeraden: Messungen liefern einige Punkte

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

die eigentlich auf einer Geraden liegen sollten. Man versucht eine Gerade so gut wie möglich durch diese Punkte zu legen.

Definitionsgemäß ist die Gerade $y = ax + b$ **optimal**, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

minimal ist (**Methode der kleinsten Quadrate**). Definiere

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n},\ \ \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}.$$

Satz 8.1. *Die Gerade $y = a_0 x + b_0$ mit*

$$a_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - n\overline{x}\,\overline{y}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - n\overline{x}^2} \quad \textit{und} \ \ b_0 = \overline{y} - a_0 \overline{x}$$

ist optimal. Diese Gerade heißt ***Regressionsgerade*** *zu* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

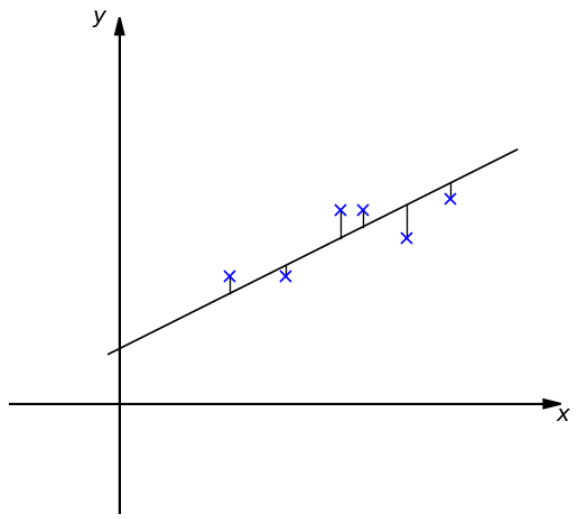

Abbildung 11: Regressionsgerade

Idee: Man minimiere zunächst die Funktion

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

bei festgehaltenem a als Funktion von b. Beachte dazu, dass

$$\frac{d\,f(a,b)}{d\ b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)$$

größer 0 ist für $b > \overline{y} - a\overline{x}$, gleich 0 ist für $b = \overline{y} - a\overline{x}$ und kleiner 0 ist für $b < \overline{y} - a\overline{x}$. Also hat $f(a,\cdot)$ in $b = b(a) = \overline{y} - a\overline{x}$ ein striktes Minimum, das heißt es ist

$$f(a,b(a)) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + \overline{y} - a\overline{x} - y_i)^2 < f(a,t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq b(a)$. Im zweiten Schritt minimiere man

$$f(a,b(a)) = \sum_{i=1}^{n} \left(a(x_i - \overline{x}) + (\overline{y} - y_i)\right)^2$$

als Funktion von a. Beachte dazu, dass

$$\frac{d}{da} f(a,b(a)) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a(x_i - \overline{x})^2 + (\overline{y} - y_i)(x_i - \overline{x})\right)$$

größer 0, gleich 0 oder kleiner 0 ist für a größer, gleich oder kleiner

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - n\overline{x}\,\overline{y}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2}$$

ist. Also hat f an der Stelle (a_0, b_0) mit diesem a_0 und

$$b_0 = b(a_0) = \overline{y} - a_0\overline{x}$$

ein striktes absolutes Minimum, das heißt

$$f(a_0, b_0) < f(a, b) \text{ für alle } (a, b) \neq (a_0, b_0).$$

8.2 Einfache Potenzfunktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = ax^2$ $(a > 0)$

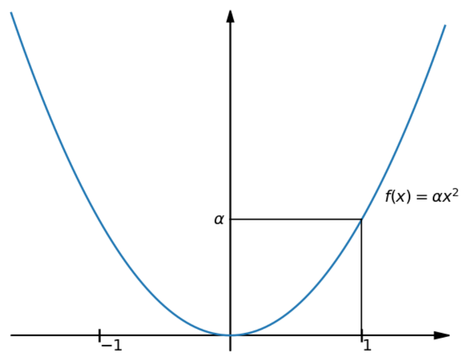

Abbildung 12: Quadratische Parabel

heißt **quadratische Parabel**. Eine Funktion der Form $f(x) = ax^3$ $(a > 0)$

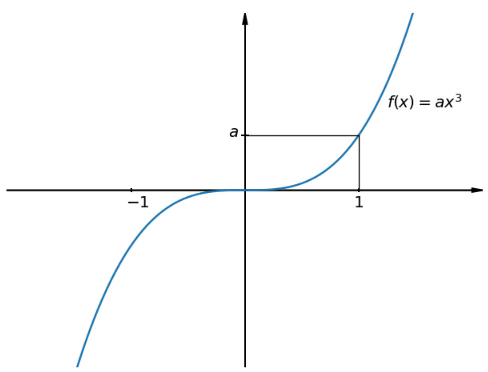

Abbildung 13: Kubische Parabel

nennt man **kubische Parabel** (**Parabel 3. Ordnung**). Funktionen der Form $f(x) = \sqrt{x}, f(x) =$

$x^{\frac{1}{3}}$ $(x > 0), \ldots$

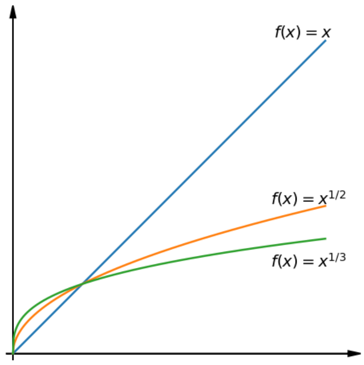

Abbildung 14: Wurzelfunktionen

heißen **Wurzelfunktionen**.

8.3 Polynomfunktionen

Sei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}).$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** von p (geschrieben: deg(p)=n).

Sei $p(x_0) = 0$. Dann gilt

$$p(x) = p(x) - p(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x^i - x_0^i).$$

Mit der geometrischen Summenformel (Satz 4.1) erhält man

$$x^i - x_0^i = x_0^i((\frac{x}{x_0})^i - 1) = x_0^i(\frac{x}{x_0} - 1)\sum_{j=0}^{i-1}(\frac{x}{x_0})^j = (x - x_0)\sum_{j=0}^{i-1} x^j x_0^{i-1-j}.$$

Also ist $p(x) = (x - x_0)q(x)$ mit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j x_0^{i-1-j} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

mit geeigneten $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Fazit:

(1) Ein Polynom vom Grade n hat höchstens n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$ (erst recht in $\mathbb{R}$!).

(2) Ist $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom mit $\deg(p) = n \geq 1$, so ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)q(x)$$

mit einem Polynom vom Grade $n-1$

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Wegen

$$p(x) - p(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x_0) x^i = b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - b_i x_0) x^i - b_0 x_0$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich (mit (1))

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{i-1} = a_i + b_i x_0\ (i = 1, \ldots, n-1),\ p(x_0) = a_0 + b_0 x_0.$$

Mit dem **Horner-Schema** kann man den Wert eines Polynoms p an einer beliebigen Stelle x_0 rekursiv berechnen. Für ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ n-ten Grades, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ mit

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)q(x)$$

wie oben berechnet man sukzessive $b_{n-1}, \ldots, b_0, p(x_0)$ nach dem Schema

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & + & + & + & \ldots & + & + \\
x_0 & 0 & b_{n-1}x_0 & b_{n-2}x_0 & \ldots & b_1 x_0 & b_0 x_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 & p(x_0)
\end{array}$$

Dabei benötigt man n Additionen und Multiplikationen.

Beispiel 8.2. Man berechne $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -0,5$:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
 & & + & + & + \\
x_0 = -0,5 & & -1 & -1 & 0,5 \\
\hline
 & 2 & 2 & -1 & 1,5
\end{array}$$

Also ist $p(-0,5) = 1,5$.

In der Mathematik zeigt man:

Satz 8.3. (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom* $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$ *mit* $\deg(p) = n \geq 1$ *hat mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$, *das heißt es gibt ein* $c \in \mathbb{C}$ *mit* $p(c) = 0$.

Über $\mathbb{R}$ ist dieser Satz falsch. So hat etwa das Polynom

$$p(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

keine reelle Nullstelle.

Folgerung 8.4. (Linearfaktorzerlegung) *Jedes Polynom* $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$ *mit* $a_n \neq 0$ *hat die Gestalt*

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - c_i)$$

mit geeigneten komplexen Zahlen $c_1, \ldots, c_n$*.*

8.4 Exponentialfunktion

Satz 8.5. *Die Funktion*

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \; E(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$$

hat die Eigenschaften:

(i) $E(x+y) = E(x)E(y)$, $E(0) = 1$ *und* $E(-x) = 1/E(x)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $|E(x) - E(0)| \leq |x| E(1)$ *für* $0 \leq |x| \leq 1$,

(iii) $|\frac{E(x)-E(0)}{x} - 1| \leq |x| E(1)$ *für* $0 < |x| \leq 1$.

(iv) E *ist stetig und streng monoton wachsend mit*

$$\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0, \; \lim_{x \to \infty} E(x) = \infty$$

(soll heißen: für jede Folge $(x_n) \xrightarrow{n} -\infty$ *gilt* $E(x_n) \xrightarrow{n} 0$ *und für jede Folge* $(x_n) \xrightarrow{n} \infty$ *gilt* $E(x_n) \xrightarrow{n} \infty$*).*

(v) $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$*.*

Die Zahl $e = E(1)$ heißt **Eulersche Zahl**. Man kann zeigen, dass

$$e = 2{,}718\,281\ldots \in\,]2,3[$$

keine rationale Zahl ist.

Ideen: (i) wurde in Beispiel 7.12 begründet.

(ii) und (iii): Für $|x| \leq 1$ gilt

$$|E(x) - 1| = |\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k!}| \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{|x|^k}{k!} = |x| \sum_{k=1}^\infty \frac{|x|^{k-1}}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} \leq |x| E(1)$$

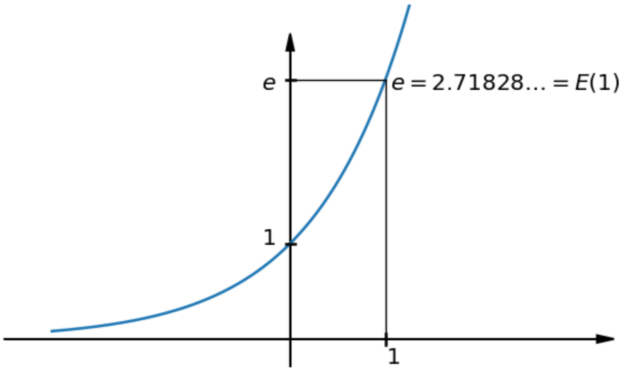

Abbildung 15: Exponentialfunktion

und

$$|\frac{E(x)-1}{x}-1| = |\frac{E(x)-1-x}{x}| = |x|\ |\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{k!}| \leq |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x|E(1).$$

(iv) Für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \geq 1 + x \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$$

und

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)} \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt für $y > x$

$$E(y) = E(x)E(y-x) > E(x),$$

denn wegen $y - x > 0$ ist $E(y-x) > 1$ und nach Beispiel 7.12 ist $E(x) > 0$. Für $(x_n) \overset{n}{\longrightarrow} 0$ ist $|x_n| \leq 1$ für genügend große n und damit

$$|E(x_n) - E(0)| \leq |x_n|E(1) \overset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Für $(x_n) \overset{n}{\longrightarrow} x$ folgt

$$E(x_n) = E(x_n - x)E(x) \overset{n}{\longrightarrow} E(0)E(x) = E(x).$$

(v) folgt mit dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) aus (iii).

Definition 8.6. Man nennt die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$ die **Exponentialfunktion** und schreibt:

$$\exp(x) = E(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

8.5 Der natürliche Logarithmus

Als bijektive Funktion hat $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ eine Umkehrfunktion $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, das heißt $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist die eindeutige bestimmte Funktion mit

$$L(y) = x, \text{ falls } E(x) = y \text{ ist.}$$

Definition 8.7. Man nennt die Funktion $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ den **natürlichen Logarithmus** und schreibt

$$\ln x = L(x) \text{ für } x > 0.$$

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

(i) L ist stetig:
Sei (y_n) eine Folge in $\mathbb{R}_+^*$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}_+^*$. Definiere

$$x_n = L(y_n), x = L(y).$$

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist. Sonst gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit

$$x_n \notin [x - \epsilon, x + \epsilon] \text{ für unendliche viele } n.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) ist $E([x - \epsilon, x + \epsilon]) = [E(x - \epsilon), E(x + \epsilon)]$

$$\Rightarrow y_n = E(x_n) \notin [E(x - \epsilon), E(x + \epsilon)] \text{ für unendlich viele } \ n.$$

Da $E(x - \epsilon) < E(x) = y < E(x + \epsilon)$ gilt, ist dies ein Widerspruch zu $(y_n) \xrightarrow{n} y$.

(ii) $L(1) = 0$ und L ist streng monoton wachsend:

$$\text{Aus } E(x_1) < E(x_2) \text{ folgt } x_1 < x_2, \text{ da } E \text{ streng monoton wächst.}$$

(iii) $L(xy) = L(x) + L(y)$ für alle $x, y > 0$:

$$E(L(xy)) = xy = E(L(x))E(L(y)) = E(L(x) + L(y)).$$

(iv) L wird beliebig große für große x, denn für $x > 2^n$ gilt

$$L(x) > L(2^n) = nL(2) \xrightarrow{n} \infty$$

und beliebig klein für $x \downarrow 0$:

$$L(x) = -L(\frac{1}{x}) \xrightarrow{(x\downarrow 0)} -\infty.$$

Der Graph des natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ entsteht durch Spiegeln des Graphen der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der ersten Winkelhalbierenden.

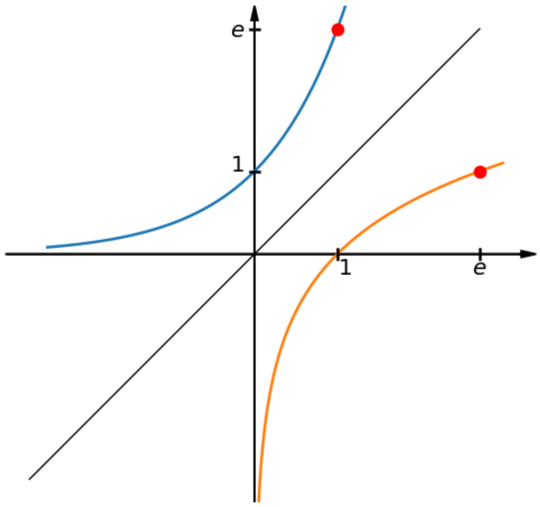

Abbildung 16: Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

8.6 Allgemeine Potenzen

Für $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ ist

$$L(a^{\frac{m}{n}}) = L((a^{\frac{1}{n}})^m) = m\ L(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{m}{n}(n\ L(a^{\frac{1}{n}})) = \frac{m}{n}L(a).$$

Also ist

$$a^{\frac{m}{n}} = E(L(a^{\frac{m}{n}})) = E(\frac{m}{n}L(a)) = \exp(\frac{m}{n}\ln(a)).$$

Daher definiert man für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$

$$a^x = \exp(x\ \ln(a)).$$

Man rechnet leicht nach:

(i) Die üblichen Potenzgesetze gelten,

(ii) $\ln(a^x) = x\ \ln(a)$,

(iii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto a^x$ ist stetig und streng monoton wachsend für $a > 1$, streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

Wir hatten den Wert der Expontialfunktion an der Stelle 1:

$$e = \exp(1) \approx 2,71828\ldots$$

die **Eulersche Zahl** genannt. Mit der obigen Definition allgemeiner Potenzen folgt

$$e^x = \exp(x\ \ln\ e) = \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

8.7 Trigonometrische Funktionen

Für den Winkel $t \in \mathbb{R}$ (gemessen im Bogemaß, das heißt Vielfachen von 2π) definiert man geometrisch

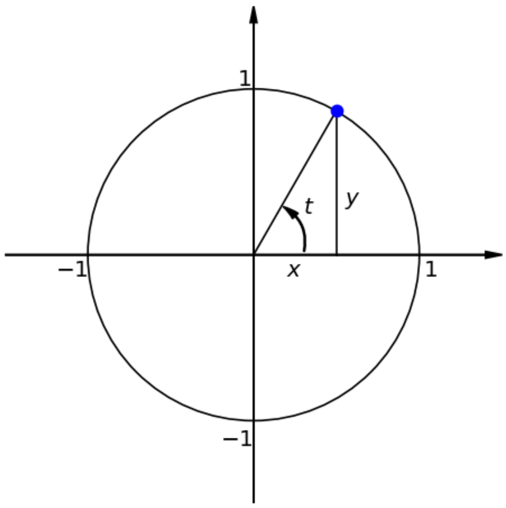

Abbildung 17: Definition von sin und cos

$$\sin t = y, \quad \cos t = x$$

als die y- bzw. x-Koordinate des Schnittpunktes des Halbstrahls in Richtung t mit dem Einheitskreis und

$$\begin{array}{lllll} \tan t & = & \frac{\sin t}{\cos t} & = \frac{y}{x} & (t \notin \{(2n+1)\frac{\pi}{2} |\ n \in \mathbb{Z}\}), \\ \cot t & = & \frac{\cos t}{\sin t} & = \frac{x}{y} & (t \notin \{n\pi |\ n \in \mathbb{Z}\}). \end{array}$$

Eine alternative analytische Definition kann man mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

geben. Wie im reellen benutzt man meistens die Schreibweise

$$e^z = \exp(z).$$

Es ist $\exp(0) = 1$ und für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w),\ \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$

Folgerung 8.8. *Für $t \in \mathbb{R}$ ist $|e^{it}| = 1$.*

Denn $|e^{it}|^2 = \exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) = \exp(0) = 1$. Also liegen die Zahlen e^{it} $(t \in \mathbb{R})$ auf dem Einheitskreis. Man definiert

$$\cos t = \mathrm{Re}(e^{it}),\ \sin t = \mathrm{Im}(e^{it}).$$

Aus dieser Definition folgt sofort

(1) $\cos^2 t + \sin^2 t = |e^{it}|^2 = 1,$

(2) **Additionstheoreme:** Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(s \pm t) &= \mathrm{Re}(e^{i(s\pm t)}) = \mathrm{Re}(e^{is}e^{\pm it}) \\ &= \mathrm{Re}(e^{is})\mathrm{Re}(e^{\pm it}) - \mathrm{Im}(e^{is})\mathrm{Im}(e^{\pm it}) \\ &= \cos s \cos t \mp \sin s \sin t\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\sin(s \pm t) = \sin s \cos t \pm \cos s \sin t.$$

(3) $\sin(-t) = -\sin t, \cos(-t) = \cos t.$

Der sinus definiert eine gerade, der cosinus eine ungerade Funktion.

Man kann auch zeigen:

(4) $\sin(t + 2\pi) = \sin t, \cos(t + 2\pi) = \cos t,$

(5)

$$\begin{aligned}\sin(0) &= 0, \sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \sin\pi = 0, \sin(\tfrac{3}{2}\pi) = -1, \\ \cos(0) &= 0, \sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \sin\pi = 0, \sin(\tfrac{3}{2}\pi) = -1, \\ \sin\tfrac{\pi}{4} &= \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

(6) $\sin, \cos, \tan, \cot$ sind stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned}\sin(t + \pi) &= -\sin t, \cos(t + \pi) = -\cos t \\ \sin(t + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos t, \cos(t + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin t.\end{aligned}$$

(7) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos t = \mathrm{Re}\ e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k + (-it)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k}}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

und entsprechend

$$\sin t = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

mit absolut konvergenten Reihen.

(8) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin\, t}{t} = 1$, das soll heißen: Für jede Folge

$$(t_n) \xrightarrow{n} 0 \text{ in } \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ gilt } (\frac{\sin\, t_n}{t_n}) \xrightarrow{n} 1.$$

Dies folgt aus der für $|t| \leq 1$ gültigen Abschätzung:

$$|\frac{\sin\, t}{t} - 1| = |\frac{\sin\,(t) - t}{t}| = |\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}|$$

$$\leq |t|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^{2k-2}}{(2k+1)!} \leq |t|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \xrightarrow{(t\to 0)} 0.$$

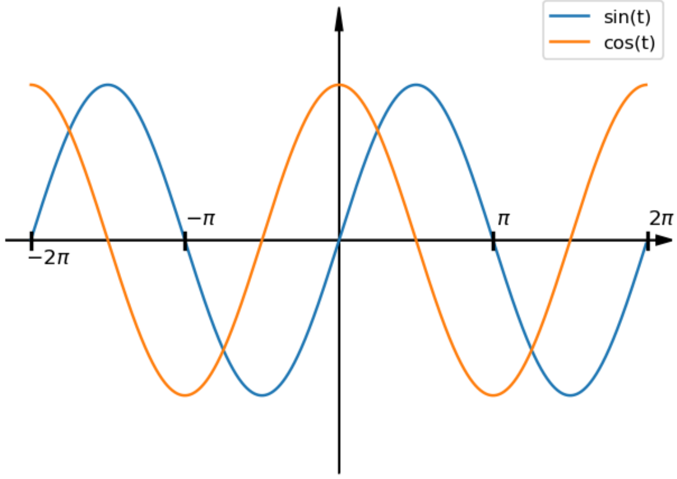

Abbildung 18: Sinus und Cosinus

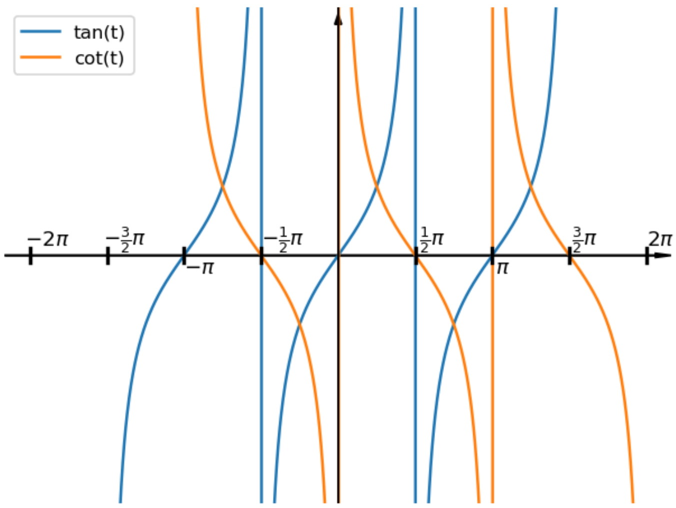

Abbildung 19: Tangens und Cotangens

9 Differentialrechnung

9.1 Ableitungen

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Problem: Wie kann man die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0 definieren und berechnen?

Idee: Für $x, x_0 \in D$ mit $x \neq x_0$ hat die Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ die Steigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Für $x \to x_0$ sollten diese Geraden die Tangente von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ immer besser approximieren. Die Steigung der Tangente sollte gleich dem Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sein.

Wir sagen, dass dieser Grenzwert existiert, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert so, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = c$$

ist für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Abkürzend hierfür schreibt man

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

Definition 9.1. (a) Man nennt

$$f'(x_0) \text{ (oder auch } \frac{df}{dx}(x_0)) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

die **Ableitung** von f in $x_0 \in D$, falls dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt die Funktion f **differenzierbar** in x_0.

(b) Existiert für jedes $x \in D$ die Ableitung von f in x, so erhält man eine neue Funktion

$$f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \qquad (\textbf{Ableitung} \text{ von } f).$$

Beispiele 9.2. (1) Ist $f(x) \equiv c$ konstant, so ist $f' = 0$. Denn:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \overset{(x\to x_0)}{\longrightarrow} 0.$$

(2) Ist $f(x) = x$ die identische Funktion, so ist $f'(x) = 1$ für alle x. Denn:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

(3) Für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$. Denn:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 2x_0.$$

(4) Allgemeiner: Für $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$. Denn (Abschnitt 8.3):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-2}x + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

(5) Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$. Denn nach Satz 8.5 (iii) gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = e^{x_0}.$$

9.2 Zusammenhang mit der Stetigkeit

Satz 9.3. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist f auch stetig in x_0.*

Idee: Für $(x_n) \overset{n}{\longrightarrow} x_0$ gilt mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$

$$|f(x_n) - f(x_0| = |\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}| \, |x_n - x_0| \leq M|x_n - x_0| \overset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Die Umkehrung von Satz 9.3 ist falsch. So ist etwa die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar im Punkt $x = 0$, denn

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\uparrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

.

9.3 Rechenregeln

Satz 9.4. *Für differenzierbare Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), (cf)'(x) = cf'(x)$,

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(c) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *falls* $g(x) \neq 0$ *ist für alle* $x \in D$.

Einige Ideen: Die Produktregel folgt mit den Grenzwertsätzen für Folgen

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

entsprechend auch die Quotientenregel

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &\overset{(x\to x_0)}{\longrightarrow} \frac{1}{g(x_0)^2} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right].\end{aligned}$$

Auch Kompositionen differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar:

Satz 9.5. (Kettenregel) *Sind $h : D \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $h(D) \subset E$, so ist*

$$f = g \circ h : D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(h(x))$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) \qquad \text{für } x \in D.$$

Idee: (für den Fall, das h injektiv ist) Für $x_n \overset{n}{\longrightarrow} x_0$ mit $x_n \neq x_n$ gilt

$$h(x_n) \overset{n}{\longrightarrow} h(x_0) \text{ und } h(x_n) \neq h(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{g(h(x_n)) - g(h(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{g(h(x_n)) - g(h(x_0))}{h(x_n) - h(x_0)} \frac{h(x_n) - h(x_0)}{x_n - x_0} \overset{n}{\longrightarrow} g'(h(x_0))h'(x_0)$$

Beispiele 9.6. (1) Sei $g(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$f = g \circ h = h^n$$

differenzierbar mit

$$(h^n)' = f' = (g' \circ h)h' = nh^{n-1}h'.$$

(2) Sei $g(x) = e^x$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$f = g \circ h = e^h$$

differenzierbar mit

$$(e^h)' = f' = (g' \circ h)h' = e^h h'.$$

Satz 9.7. (Umkehrfunktionen) *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton und ist $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar in $f(x_0)$ mit*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Merkregel: Die Formel folgt mit der Kettenregel aus

$$1 = (id)'(x_0) = (f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0),$$

wenn man die Differenzierbarkeit von f^{-1} in $f(x_0)$ gezeigt hat.

Beispiele 9.8. (1) Der natürliche Logarithmus ist differenzierbar als Umkehrfunktion von exp. Durch Ableiten von $x = \ln(\exp(x))$ erhält man für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Beispiel 9.2(5)

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \ln'(\exp(x))\exp'(x) = \ln'(\exp(x))\exp(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln'(\exp x) &= \tfrac{1}{\exp(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \ln'(x) &= \tfrac{1}{x} \text{ für alle } x > 0. \end{aligned}$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar, so folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}(\ln f) = (\ln' \circ f)f' = \frac{f'}{f}.$$

(2) Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zeigt die Quotientenregel, dass

$$(x^n)' = (\frac{1}{x^{|n|}})' = \frac{-|n|x^{|n|-1}}{(x^{|n|})^2} = nx^{n-1}.$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad \text{(nur für } x \neq 0, \text{ wenn } n < 0 \text{ ist).}$$

(3) **Allgemeine Potenzfunktionen:**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ differenzierbar mit

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ für alle } x > 0.$$

Dies folgt mit der Kettenregel

$$(\exp(\alpha \ln x))' = \exp'(\alpha \ln x)(\alpha \ln x)' = \alpha \exp(\alpha \ln x)\frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(4) **Allgemeine Exponentialfunktion:** Für $a > 0$ ist $(a^x)' = (\ln a)a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn:

$$(a^x)' = (\exp(x \ln a))' = \exp'(x \ln a)(x \ln a)' = (\ln a)a^x.$$

9.4 Potenzreihen

Nach Beispiel 7.2 (1) hat die Funktion $]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x|<1).$$

Hat eine Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ für einen festen Punkt $x_0 \in]a,b[$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x \in]a,b[)$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$, so sagt man, dass f eine **Potenzreihenentwicklung** auf $]a,b[$ im Punkt x_0 hat mit Koeffizienten a_n $(n \geq 0)$.
In der Mathematik zeigt man:

Satz 9.9. *Ist $x_0 \in]a,b[$ und hat $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ die Potenzreihenentwicklung*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ auf }]a,b[,$$

so ist f differenzierbar, und es gilt für $x \in]a,b[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n.$$

Die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

konvergiert für $x \in]a,b[$ und es gilt

$$F'(x) = f(x) \text{ für } x \in]a,b[.$$

Sind $f, F : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ und ist F differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so nennt man F eine **Stammfunktion** von f. Durch iteriertes Anwenden von Satz 9.9 folgt:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x-x_0)^n \Rightarrow f''(x_0) = 2! a_2, \\
f'''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) a_{n+3} (x-x_0)^n \Rightarrow f'''(x_0) = 3! a_3 \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &\overset{\text{Def}}{=} (\ldots((f)')'\ldots)' \qquad (k-\text{mal}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k) a_{n+k} (x-x_0)^n.
\end{aligned}$$

Also ist für alle $k \in \mathbb{N}$
$$f^{(k)}(x_0) = k!\ a_k \text{ oder } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Merkregel: Konvergiert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ für $x \in]a, b[$, so ist f unendlich oft differenzierbar und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Man nennt
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = (\ldots((f)')' \ldots)'(x)$$
die n**-te Ableitung** von f im Punkt x.

Beispiele 9.10. (a) Durch gliedweises Ableiten bzw. Bilden von Stammfunktionen erhält man neue Potenzreihendarstellungen aus schon bekannten:

(i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$,

(ii) $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad (|x| < 1)$,

(iii) $\ln(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \qquad (|x| < 1)$.

Für (iii) benötigt man: Zwei Stammfunktionen können sich auf einem Intervall höchstens um eine Konstante unterscheiden, sind also gleich, wenn sie an einer Stelle übereinstimmen.

(b) Gliedweises differenzieren der sinus- und cosinus-Reihen ergibt:

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \\
\cos'(x) &= (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!})' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit der Quotientenregel folgt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2} | \ n \in \mathbb{Z}\}$:
$$\tan'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ in einem Punkt $x \neq x_0$, so gibt es ein maximales offenes Intervall um x_0 auf dem die Potenzreihe konvergiert:

Satz 9.11. *Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ so, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergiert in jedem Punkt $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ und divergiert in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, der nicht zu $[x_0 - r, x_0 + r]$ gehört. Dabei sei $x_0 + \infty = \infty$ und $x_0 - \infty = -\infty$.*

(b) *Sei r wie in Teil (a). Sind alle $a_n \neq 0$ und existiert $\ell = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, so ist $r = \ell$.*

In der Situation von Satz 9.11 nennt man r den **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Teil (b) des letzten Satzes folgt aus dem Quotientenkriterium (Satz 7.9), denn für $x \neq x_0$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}|\,|x-x_0| \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{|x-x_0|}{\ell},$$

wenn man $c/\infty = 0$ und $c/0 = \infty$ definiert für $c > 0$.

9.5 Einige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n $(n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1} (für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $n < 0$)
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$ (für $x > 0$)
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log\ x = \log_{10} x$	$1/(x \ln 10)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Für $\log\ x = \log_{10} x$ beachte:

$$\log_{10} y = x, \text{ falls } 10^x = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln 10}.$$

Also ist $\log_{10} y = \frac{\ln y}{\ln 10}$ für alle $y > 0$.

10 Extremwerte, Kurvendiskussionen

10.1 Definition lokaler Extrema

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ schreiben wir

$$U_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\qquad (\epsilon\text{-Umgebung von } x_0)$$

Definition 10.1. (a) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monton wachsend** (**fallend**), wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), **streng monoton wachsend** (**fallend**), wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

(b) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum** (**Minimum**), falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\epsilon(x_0) \cap D \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0) \text{ für alle } x \in U_\epsilon(x_0) \cap D).$$

Gilt hier das Gleichheitszeichen nur für $x = x_0$, so spricht man von einem **strikten** oder **isolierten lokalen Maximum** (**Minimum**).

(c) Der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum ist **Extremum**.

(d) Möchte man sagen, dass die obigen Ungleichungen nicht nur lokal in einer Umgebung von x_0 gelten, sondern auf ganz D, so spricht man von einem **absoluten Extremum**.

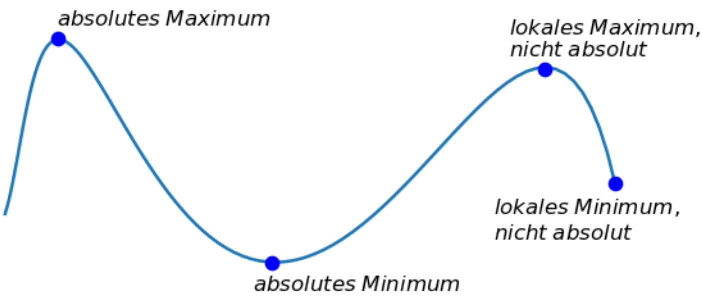

Abbildung 20: Lokale und absolute Extrema

10.2 Notwendige Bedingungen für lokale Extrema

Satz 10.2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]a,b[$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Idee für lokale Minima:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \leq 0.$$

Warnungen: (a) Der Satz gilt im Allgemeinen nicht für die Randpunkte $x_0 = a$ oder $x_0 = b$. So hat etwa die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$ ein lokales (sogar absolutes) Minimum in $x_0 = 0$, aber $f'(x_0) = 1 \neq 0$.

(b) Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber f hat in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum.

Satz 10.3. (Satz von Rolle) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei f auf $]a,b[$ differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in\ ]a,b[$ mit $f'(x) = 0$.*

Idee: Nach Satz 6.7 gibt es $x_0, y_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Ist $f(x_0) = f(y_0)$, so ist $f \equiv$ const. und $f' \equiv 0$. Sonst ist $x_0 \in]a,b[$ oder $y_0 \in]a,b[$. Für $x \in \{x_0, y_0\} \cap]a,b[$ ist $f'(x) = 0$ nach Satz 10.2.

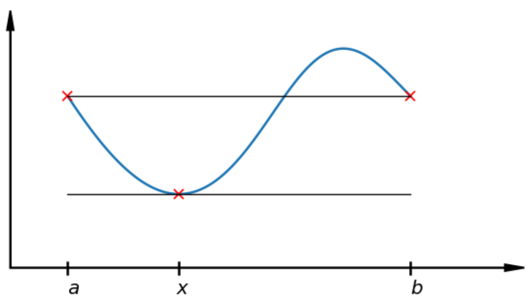

Abbildung 21: Satz von Rolle

Satz 10.4. (1. Mittelwertsatz der DR) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gibt es ein $x \in\ ]a,b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Idee: Man wende Satz 10.3 an auf die Funktion

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Anwendung: (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' \equiv 0$ auf $[a,b]$, so ist f konstant auf $[a,b]$.
(b) Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$ auf $[a,b]$, so ist $f - g$ konstant auf $[a,b]$.

Satz 10.5. (2. Mittelwertsatz der DR) *Sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* $]a, b[$ *mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in \,]a, b[$, *so existiert ein* $x \in]a, b[$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Idee: Man wende Satz 10.3 an auf $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

10.3 Monotonie

Satz 10.6. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* $]a, b[$.

(i) Ist $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \,]a, b[$, *so ist* f *monoton wachsend auf* $[a, b]$.

(ii) Ist $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in \,]a, b[$, *so ist* f *monton fallend auf* $[a, b]$.

Ersetzt man " $\geq$ *" durch "* $>$ *" bzw. "* $\leq$ *" durch "* $<$ *", so erhält man strenge Montonie auf* $[a, b]$.

Idee für (i): Für $c, d \in [a, b]$ mit $c < d$ existiert nach Satz 10.4 ein $x \in \,]c, d[$ mit

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) \geq 0.$$

Beispiel 10.7. Welche Maße muss eine zylindrische Dose haben, wenn möglichst wenig Material verbraucht werden soll? Oberfläche O und Volumen V der Dose sind

$$\mathrm{O} = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = \pi r^2 h.$$

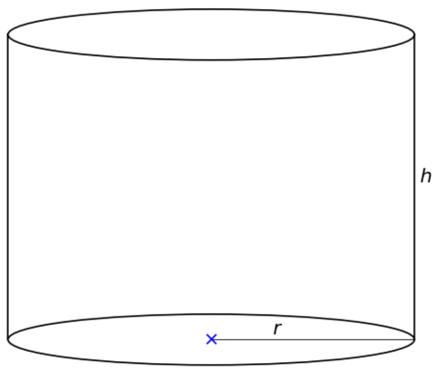

Abbildung 22: Minimierung der Oberfläche

Also ist $h = V/\pi r^2$ und O lässt sich bei vorgegebenem Volumen V als Funktion der einzigen Variablen $r > 0$ beschreiben

$$\mathrm{O} = 2\pi r^2 + 2V/r.$$

Es ist

$$\frac{d}{dr}\mathrm{O} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \begin{cases} < \ 0 \text{ für } r^3 < V/2\pi \\ = \ 0 \text{ für } r^3 = V/2\pi \\ > \ 0 \text{ für } r^3 > V/2\pi \end{cases} .$$

Nach Satz 10.6 ist $\mathrm{O}(r)$ streng monoton fallend auf $]0,(V/2\pi)^{1/3}]$ und streng monoton wachsend auf $[(V/2\pi)^{1/3},\infty[$. Folglich hat $\mathrm{O}(r)$ ein absolutes Minimum in $r_0 = (V/2\pi)^{1/3}$.

10.4 Lokale Extrema: Hinreichende Bedingung

Was passiert in den Punkten $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$?

Satz 10.8. *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar und sei $x_0 \in]a,b[$. Dann gilt:*

(i) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f ein striktes lokales Minimum in x_0.

(ii) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f ein striktes lokales Maximum in x_0.

Idee (für (i)): Wegen

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} = \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \overset{(x\to x_0)}{\longrightarrow} f''(x_0) > 0$$

ist $f'(x)/(x-x_0) > 0$ nahe x_0, so heißt auf $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Dann ist aber

$$f'(x) < 0 \text{ auf }]x_0-\epsilon, x_0[\text{ und } f'(x) > 0 \text{ auf }]x_0, x_0+\epsilon[,$$

und nach Satz 10.6 ist f streng monoton fallend auf $[x_0-\epsilon, x_0]$, streng monoton wachsend auf $[x_0, x_0+\epsilon]$.

10.5 Krümmung und Wendepunkte

Ist $f''(x) > 0$ für $x \in]a,b[$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, dann wächst f' auf $]a,b[$ nach Satz 10.6 streng monoton, das heißt für $a < x_1 < x_2 < b$ ist der Anstieg von f in x_1 kleiner als im Punkt x_2.

In diesem Fall heißt f **linksgekrümmt oder konvex** auf $]a,b[$. Entsprechend nennt man f **rechtsgekrümmt oder konkav** auf einem Intervall $]a,b[$, wenn $f''(x) < 0$ auf diesem Intervall ist.

Ist $f :]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[\to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar und rechtsgekrümmt auf $]x_0-\epsilon, x_0[$, linksgekrümmt auf $]x_0, x_0+\epsilon[$, so hat f' in x_0 nach Satz 10.6 ein striktes lokales Minimum.

Definition 10.9. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Punkte $x_0 \in]a,b[$, in denen f' ein striktes lokales Extremum hat, heißen **Wendepunkte** für f.

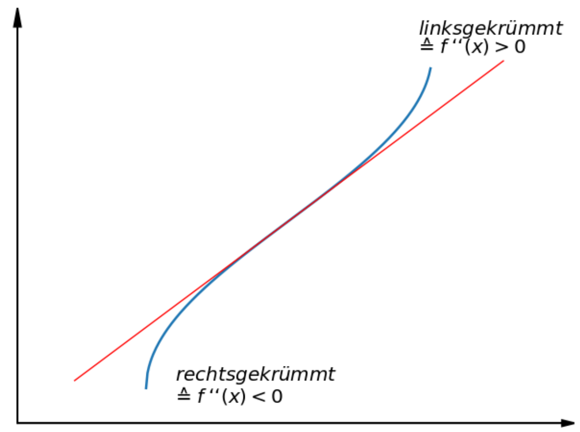

Abbildung 23: Krümmung

Beispiele 10.10. (1) Für $f(x) = x^4 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 2x &&= 2x(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 1/\sqrt{2}, \\ f''(x) &= 12x^2 - 2 &&= 12(x^2 - \tfrac{1}{6}),\ f'''(x) = 24x. \end{aligned}$$

Nach Satz 10.8 hat f ein striktes lokales Maximum in $x = 0$, strikte lokale Minima in $\pm 1/\sqrt{2}$ und Wendepunkte in $\pm 1/\sqrt{6}$.

(2) Für $f(x) = e^{-x^2}$ ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\, e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ f''(x) &= (-2 + 4x^2)e^{-x} = 2\, e^{-x^2}(2x^2 - 1). \end{aligned}$$

Wegen $f''(0) = -2$ liegt in 0 nach Satz 10.8 ein striktes lokales Maximum vor. Wegen

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x^2 < \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\tfrac{1}{2}} &&\text{(hier ist } f \text{ rechtsgekrümmt)}, \\ f''(x) > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x > \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ oder } x < -\sqrt{\tfrac{1}{2}} &&\text{(hier ist } f \text{ linksgekrümmt)} \end{aligned}$$

liegen Wendepunkte vor bei $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ nach Satz 10.6.

Bemerkung 10.11. Die Funktion in Beispiel 10.10(1) ist ein normiertes Polynom (das heißt ein Polynom mit führendem Koeffizienten 1). Das Wachstumsverhalten solcher Polynome für $x \to \pm\infty$ lässt sich sehr einfach beschreiben. Ist $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n$ ein normiertes Polynom vom Grade $n \geq 1$, so ist $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ und

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty, & \textit{falls } n \textit{ gerade ist,} \\ -\infty, & \textit{falls } n \textit{ ungerade ist.} \end{cases} .$$

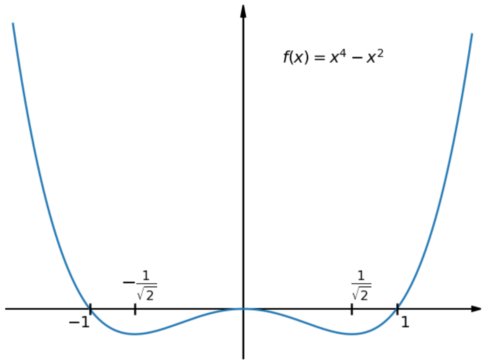

Abbildung 24: Beispiel 10.10(1)

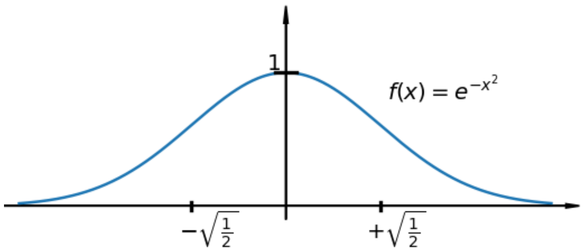

Abbildung 25: Beispiel 10.10(2)

10.6 Regeln von L' Hospital

Problem: Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und seinen $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{x \to b} f(x) = 0 = \lim_{x \to b} g(x)$$

oder

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty = \lim_{x \to b} g(x).$$

Was kann man sagen über $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$? Hierbei schreibt man für eine Funktion $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ und eine Zahl $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x \to b} h(x) = c,$$

falls $\lim_{n \to \infty} h(x_n) = c$ ist für jede Folge (x_n) in $]a, b[$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = b$.

Satz 10.12. (L' Hospital) *Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) \;\in \{0, \infty, -\infty\}, \;\; g'(x) \neq 0 \;\; \textit{für alle } x \in]a, b[.$$

Existiert

$$l = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so gilt auch

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Idee für $b < \infty$ und $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$:
Durch $f(b) = 0 = g(b)$ werden f, g stetig fortgesetzt auf $]a, b]$. Nach dem 2. Mittelwertsatz (Satz 10.5) gibt es für $x \in]a, b[$ ein $\xi_x \in]x, b[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \overset{(x\to b)}{\longrightarrow} l,$$

da mit $x \to b$ auch $\xi_x \to b$ konvergiert.

Es gelten dieselben Regeln sinngemäß für "$\lim_{x\to a}$" oder "$\lim_{x\to x_0}$" mit $x_0 \in]a, b[$. Im letzteren Fall ersetze man überall $]a, b[$ durch $]a, b[\setminus \{x_0\}$ und "$\lim_{x\to b}$" durch "$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}$".

Beispiel 10.13. Für $f(x) = e^{2x} - 1,\ g(x) = \ln(1 + x)$ gilt mit $]a, b[=] - 1, \infty[$ und $x_0 = 0$

$$\frac{(e^{2x} - 1)'}{(\ln(1 + x))'} = \frac{2e^{2x}}{1/(1 + x)} \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} \frac{2}{1} = 2.$$

Also ist auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + x)} = 2.$$

Durch Iterieren des Verfahrens aus Satz 10.12 erhält man:

Satz 10.14. (L' Hospital) *Seien $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ und $x_0 \in [a, b]$. Seien $f, g :]a, b[\cap\{x_0\}^c \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar mit $g^{(n)}(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[\cap\{x_0\}^c$ und*

$$\lim_{x\to x_0} f^{(i)}(x) = \lim_{x\to x_0} g^{(i)}(x) \in \{0, \infty, -\infty\} \text{ für } i = 0, \ldots, n - 1$$

Existiert

$$l = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so gilt auch

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

10.7 Wichtige Grenzwerte

(1) Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

und

$$\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^\alpha \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)^{(n)}}{(x^n)^{(n)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

Da $x^n \leq x^\alpha \leq x^{n+1}$ ist für $x \geq 1$ und $n \leq \alpha \leq n+1$, erhält man auch für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$$

und folglich

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha\ e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

(3) Es gilt

$$(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1} = (\exp(\frac{\ln n}{n}))_{n\geq 1} \xrightarrow{n} \exp(0) = 1,$$

da $(\ln(n)/n) \xrightarrow{n} 0$ nach (1) und da die Exponentialfunktion stetig ist.

(4) Für $c > 0$ gilt

$$\sqrt[n]{c} = \exp(\frac{1}{n}\ln c) \xrightarrow{n} \exp(0) = 1.$$

(5) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 + \frac{x}{n})^n = \exp\left[x \frac{\ln(1+\frac{x}{n}) - \ln 1}{\frac{x}{n}}\right] \xrightarrow{n} e^x,$$

denn nach Beispiel 9.8 ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln 1}{t} = \ln'(1) = 1.$$

10.8 Taylorreihen

Nach Abschnitt 9.4 ist jede Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, die eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (x \in]a, b[)$$

in einem Punkt $x_0 \in]a, b[$ hat, unendlich oft differenzierbar und die Koeffizienten a_n haben die Form

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt durch die Funktion f.

Problem: Für welche undendlich oft differenzierbaren Funktionen f gilt in der Nähe eines Punktes x_0 ihres Definitionsbereiches die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n?$$

Diese Reihe nennt man die **Taylorreihe** von f im Punkt x_0.

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in]a,b[$ feste Punkte mit $x \neq x_0$. Dann ist die Funktion $F :]a,b[\to \mathbb{R}$,

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$$

differenzierbar mit

$$F'(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Der 2. Mittelwertsatz (Satz 10.5) angewendet auf die Funktionen F und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = (x-t)^{n+1}$$

liefert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

oder

$$f(x) = F(x) = F(x_0) + (g(x)-g(x_0))\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Satz 10.15. (Taylorsche Formel mit Restglied von Lagrange) *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in]a,b[$. Dann gibt es eine Zwischenstelle ξ zwischen x und x_0 mit*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Man nennt bei festem $x_0 \in]a,b[$

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \ \left(= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right)$$

das **Restglied** $(n+1)$**-ter Ordnung** und $\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ das n**-te Taylorpolynom** von f im Punkt x_0 .

Folgerungen 10.16. *(1) Ist $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und ist $x_0 \in]a,b[$, so gilt für $x \in]a,b[$*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \Leftrightarrow R_{n+1}(x) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq A \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in]a,b[.$$

Denn in diesem Fall gilt für das Restglied

$$|R_{n+1}(x)| \leq A\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0.$$

(2) Ist $f^{(n+1)} \equiv 0$ auf $]a,b[$, so ist f ein Polynom höchstens n-ten Grades

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Beispiele 10.17. (1) Da die Koeffizienten in einer Potenzreihenentwicklung gerade die Koeffizienten aus der Taylorreihe (**Taylorkoeffizienten**) sind, sind die Taylorreihen von sinus, cosinus und exp in $x_0 = 0$ gegeben durch

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(2) Für den sinus (entsprechend für cosinus) gelten die Restglieddarstellungen

$$\sin x = \sum_{i=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(i)}(0)}{i!} x^i + R_{2n+3}(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + R_{2n+3}(x)$$

mit

$$|R_{2n+3}(x)| = |\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für alle } x \in R.$$

(3) Man kann zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0, \ f(0) = 0$$

unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$. Also ist $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Diese Funktion wird an keiner Stelle $x \neq 0$ durch ihre Taylorreihe dargestellt.

11 Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Anschauliche Idee: Die Größe F der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse

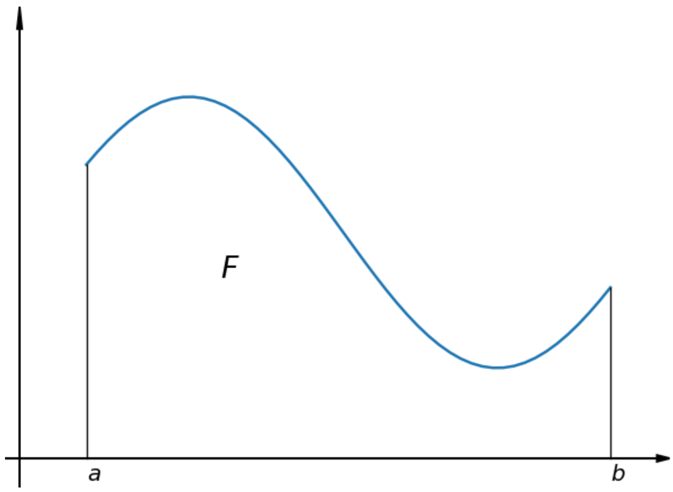

Abbildung 26: Integral-Anschauliche Definition

nennt man das Integral von f über $[a, b]$ und schreibt hierfür

$$\int_a^b f\ dx = F.$$

Dabei bewertet man Flächen über der x-Achse positiv, unter der x-Achse negativ.

11.1 Definition und Eigenschaften

Man versucht, die Funktion f durch stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen) zu approximieren und die gesuchte Fläche F als Grenzwert der Flächen unter diesen einfacheren Funktionen zu berechnen.

Dazu wähle man eine Teilung $T = (x_i)_{i=0}^n$ von $[a, b]$, das heißt eine Folge $(x_i)_{i=0}^n$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

sowie eine Folge $Z = (z_i)_{i=1}^n$ von Zwischenpunkten $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Die Fläche $F(T, Z)$ unter der Funktion, die auf den Intervallen $[x_{i-1}, x_i[$ konstant den Wert $f(z_i)$ hat, ist gegeben durch

$$F(T, Z) = \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Man nennt diese Summe die **Riemannsumme zur Teilung T und zur Zwischenfolge Z**. Für genügend feine Teilungen $T = (x_i)_{i=0}^n$ sollten die zugehörigen Riemannsummen den tatsächlichen Wert F der Fläche immer besser approximieren.
Man definiert die **Feinheit** (oder **Spurweite**) der Teilung T durch

$$\omega(T) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|.$$

In der Mathematik zeigt man:

Satz 11.1. *Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $(T_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Teilungen des Intervalls $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \omega(T_n) = 0$ und ist für jedes n eine Zwischenfolge Z_n von T_n gegeben, so existiert*

$$\lim_{n\to\infty} F(T_n, Z_n) \in \mathbb{R}$$

und ist unabhängig von der Wahl von T_n und Z_n. Man definiert

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(T_n, Z_n).$$

Beispiel 11.2. Bei Auslenkung einer Spiralfeder aus der Ruhelage um den Weg x wirkt die Kraft

$$F(x) = Dx \qquad (D = \text{Federkonstante})$$

auf den ausgelenkten Massenpunkt. Dehnt man die Feder von $x = 0$ bis $x = s$, so leistet man die Arbeit

$$\begin{aligned} A &= \int_0^s F(x)dx = \int_0^s Dx\ dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n F(i\frac{s}{n})\frac{s}{n} = \lim_{n\to\infty} D\ s^2 \sum_{i=1}^n, \ \frac{i}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} D\ s^2 \frac{n(n+1)}{2\ n^2} = \frac{D\ s^2}{2} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \frac{D\ s^2}{2}. \end{aligned}$$

Rechenregeln 11.3. *Für stetige Funktionen $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c \in\ ]a,b[$ gilt:*

(i) $\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx$,

(ii) $\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$,

(iii) $|\int_a^b f\ dx| \leq \int_a^b |f| dx$,

(iv) *ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so folgt $\int_a^b f\ dx \leq \int_a^b g\ dx$.*

Definiert man für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [\min(a,b), \max(a,b)] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^a f\ dx = 0, \quad \int_a^b f\ dx = -\int_b^a f\ dx, \quad \text{falls } b < a \text{ ist,}$$

so gilt für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ und jede stetige Funktion $f : [\min(a,b,c), \max(a,b,c)] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$

Satz 11.4. (Mittelwertsatz der IR) *Sei* $f : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gibt es ein* $t \in \ [a,b]$ *mit*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(t)(b-a).$$

Idee: Nach Satz 6.7 existieren $m = \min_{a \le x \le b} f(x), M = \max_{a \le x \le b} f(x)$. Mit Regel 11.3 (iv) folgt

$$m(b-a) = \int\limits_a^b m\ dx \le \int\limits_a^b f\ dx \le \int\limits_a^b M\ dx = M(b-a).$$

Also gibt es ein $c \in \ [m, M]$ mit

$$c(b-a) = \int\limits_a^b f\ dx.$$

Der Zwischenwertsatz (Satz 6.3) zeigt, dass ein $t \in \ [a,b]$ mit $f(t) = c$ existiert.

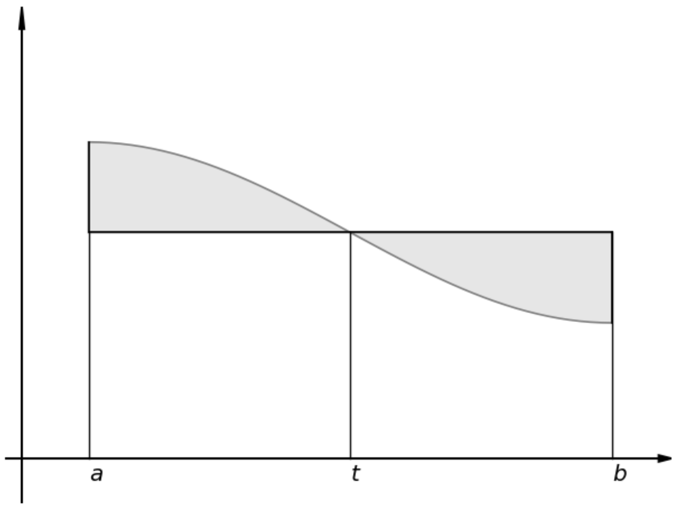

Abbildung 27: Mittelwertsatz

11.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 11.5. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn gilt

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Rechenregeln 11.6. *(i) Ist F eine Stammfunktion von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist auch $F+c$ eine Stammfunktion von f für jedes $c \in \mathbb{R}$.*

(ii) Sind F, G Stammfunktionen zu $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist $F-G$ konstant. Wegen $(F-G)' \equiv 0$ folgt dies aus dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 10.4).

Satz 11.7. (Hauptsatz) *Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion, und für jede Stammfunktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ von f gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (\overset{\text{Def}}{=} F|_a^b).$$

Idee: Für $G: [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \qquad (\overset{\text{Def}}{=} 0 \text{ für } x = a)$$

gilt nach dem Mittelwertsatz (Satz 11.4)

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} = f(\xi)$$

für eine geeigente Zahl $\xi = \xi_{x,x_0}$ zwischen x und x_0. Hierbei vertausche man x und x_0, falls $x < x_0$ ist. Wegen

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(\xi_{x,x_0}) = G'(x_0)$$

ist G Stammfunktion zu f. Ist F irgendeine Stammfunktion zu f, so gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f, so gilt die Formel

$$\int\limits_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$$

aus dem Hauptsatz für belliebige $c, d \in [a,b]$.

Schreibweise:
Man schreibt oft

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad (x \in D),$$

falls $f : D \to \mathbb{R}, F : D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind mit

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D.$$

Man beachte dabei aber, dass F nicht eindeutig bestimmt ist durch f. Das Symbol $\int f(x)dx$ nennt man das **unbestimmte Integral** von f.

11.3 Wichtige Stammfunktionen

Mit der oben eingeführten Schreibweise gilt:

(a) für $n \in \mathbb{N} : \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(b) für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} : \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(c) für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (x > 0)$,

(d) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(e) $\int e^x dx = e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(f) für $a > 0, a \neq 1 : \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\ a} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $\int \cos\ x\ dx = \sin\ x, \int \sin\ x\ dx = -\cos\ x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(h) $\int \tan\ x\ dx = -\ln\ |\cos\ x| \qquad (x \notin \{(2n+1)\frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\})$,

(i) $\int \cot\ x\ dx = \ln\ |\sin\ x| \qquad (x \notin \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\})$,

(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan\ x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin\ x \qquad (|x| < 1)$,

(l) $\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + (\cos\ x)(\sin\ x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(m) $\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x - (\cos\ x)(\sin\ x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(n) $\int \ln\ dx = x\ \ln\ x - x \qquad (x > 0)$.

11.4 Arcusfunktionen

Die in 11.3 (j) und (k) benutzten Funktionen arctan und arcsin sind als Umkehrfunktionen des Tangens und Sinus (eingeschränkt auf geeignete Intervalle) definiert.

(a) Man definiert

$$\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

als die Umkehrfunktion der bijektiven Abbildung $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Wegen

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0 \text{ für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

folgt mit Satz 9.7, dass

$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

für $|x| < \pi/2$ ist. Wegen $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ folgt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Man kann zeigen, dass

$$\lim_{x\to\infty} \arctan \mathrm{x} = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Man definiert

$$\arcsin = \sin^{-1} :\ [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

als die Umkehrfunktion der bijektiven Abbildung $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Wegen

$$\sin'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$$

für $|x| < \pi/2$ folgt mit Satz 9.7, dass

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

für $|x| < \pi/2$ ist. Wegen $\sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$ folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ für } |x| < 1.$$

(c) Entsprechend definiert man:

$$\operatorname{arccot} = \cot^{-1} : \mathbb{R} \to]0, \pi[, \arccos = \cos^{-1} :\ [-1, 1] \to [0, \pi]$$

als die Umkehrfunktionen von $\cot :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ und $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ und zeigt, dass

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}\ (x \in \mathbb{R}), \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (|x| < 1).$$

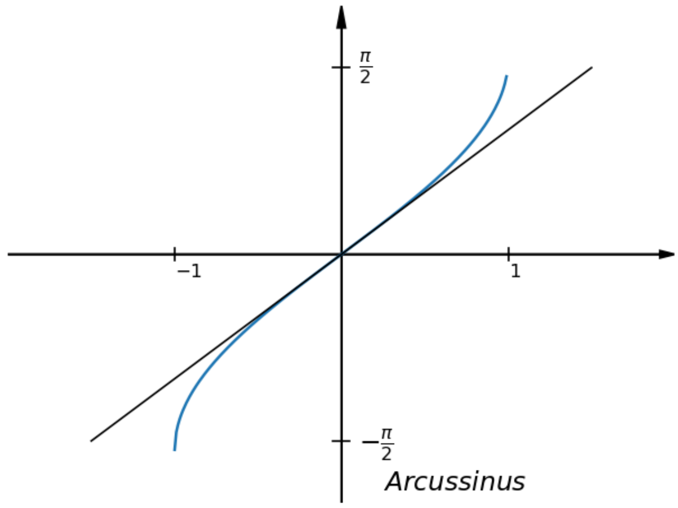

Abbildung 28: Umkehrfunktion des Sinus

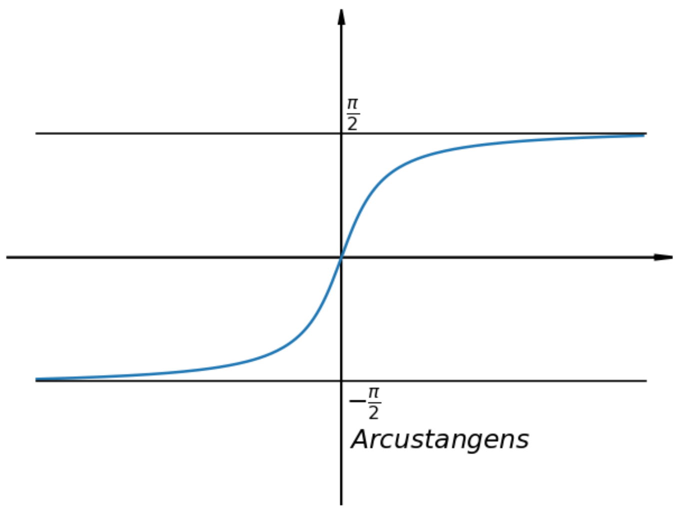

Abbildung 29: Umkehrfunktion des Tangens

11.5 Folgerungen aus dem Hauptsatz

Satz 11.8. (Partielle Integration) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, das heißt f', g' existieren und sind stetig. Dann gilt:*

$$\int\limits_a^b fg'dx = (fg)|_a^b - \int_a^b f'g\ dx.$$

Idee: Nach der Produktregel für Ableitungen (Satz 9.4(b)) und dem Hauptsatz (Satz 11.7) ist

$$\int_a^b (fg' + f'g)dx = (fg)|_a^b.$$

Auch für die unbestimmten Integrale gilt dieselbe Regel:

$$\int fg'dx = fg - \int f'g\ dx.$$

Man erhält eine Stammfunktion von fg', indem man von fg eine Stammfunktion von $f'g$ subtrahiert.

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ beliebige Intervalle (offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt).

Satz 11.9. (Substitution) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : \ J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(J) \subset I$. Dann gilt für beliebige $a, b \in J$*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Idee: Seien $a, b \in J$ und sei $F : \ I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f etwa $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Dann folgt mit der Kettenregel für Ableitungen (Satz 9.5) und dem Hauptsatz (Satz 11.7)

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt = F \circ \varphi|_a^b = F|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Beispiele 11.10. (1) Die partielle Integrationsregel mit $f(t) = \ln\, t$ und $g(t) = t$ liefert für $x > 0$

$$\int_1^x (\ln\, t)dt = \int_1^x (\ln\, t)(t)'dt = (\ln\, t)t|_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}t\ dt = (\ln\, x)x - x + 1.$$

Für die unbestimmten Integrale folgt entsprechend für $x > 0$

$$\int \ln\, x\ dx = \int (\ln\, x)(x)'dx = (\ln\, x)x - \int \frac{1}{x}x\ dx = (\ln\, x)x - x.$$

(2) Partielle Integration mit $f(x) = \cos\, x, g(x) = \sin\, x$ ergibt

$$\begin{aligned}\textstyle\int \cos^2 x\ dx &= \textstyle\int \cos\, x(\sin\, x)'dx = \cos\, x\ \sin\, x - \int (\cos\, x)'\sin\, x\ dx \\ &= \textstyle\cos\, x\ \sin\, x + \int \sin^2 x\ dx = \cos\, x\ \sin\, x + \int (1 - \cos^2 x)dx\end{aligned}$$

und damit

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(\cos\, x\ \sin\, x + \int 1dx) = \frac{1}{2}(\cos\, x\ \sin\, x + x)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt auch

$$\int \sin^2 dx = \int (1 - \cos^2 x)dx = x - \frac{1}{2}(\cos\, x\ \sin\, x + x) = \frac{1}{2}(x - \cos\, x\ \sin\, x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Mit der Substitutionsregel (Satz 11.9) folgt für $f(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\int\limits_a^x \varphi(t)^n \varphi'(t) dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} t^n dt = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} - \frac{\varphi(a)^{n+1}}{n+1} \quad (x \in [a,b])$$

und für $f(t) = \frac{1}{t}$, falls $\varphi([a,b]) \subset (0,\infty)$ ist,

$$\int\limits_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \frac{1}{t} dt = \ln \varphi(x) - \ln \varphi(a) \quad (x \in [a,b]).$$

Ist $\varphi([a,b]) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist nach dem Zwischenwertsatz $\varphi > 0$ oder $\varphi < 0$ und

$$\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln |\varphi(x)| - \ln |\varphi(a)| \quad (x \in [a,b]).$$

Für die unbestimmten Integrale erhält man die Formeln

$$\begin{aligned} \int \varphi(t)^n \varphi'(t) dt &= \tfrac{\varphi(t)^{n+1}}{n+1} \text{ auf } [a,b], \\ \int \tfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt &= \ln |\varphi(t)| \text{ auf jedem Intervall } I \subset [a,b] \text{ mit } 0 \notin \varphi(I). \end{aligned}$$

Konkrete Beispiele:

- $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t \cos t \, dt = \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$,
- $\int\limits_1^x (\ln t) \frac{1}{t} dt = \frac{C\ln\ t)^2}{2}\Big|_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$,
- $\int\limits_1^2 \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2+2)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{6}{3} = \frac{1}{2}\ln 2.$

(4) Der Graph der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$ beschreibt die obere Hälfte der Einheitskreislinie. Die Substitutionsregel mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \cos x$ liefert unter Anwendung von Beispiel (2):

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = \int\limits_{\varphi(\pi)}^{\varphi(0)} \sqrt{1-x^2} dx = \int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x) dx = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

11.6 Anwendungen

(a) **Bluttransport durch eine Ader**

Blut fließe mit Geschwindigkeit v durch eine Ader mit Radius $R > 0$. Am Rand ist die Geschwindigkeit 0, in der Mitte am größten.

Experimentelles Ergebnis (J. L. Poiseuille, 1797-1869):

$$v(r) = c(R^2 - r^2) \qquad (c > 0 \text{ Konstante})$$

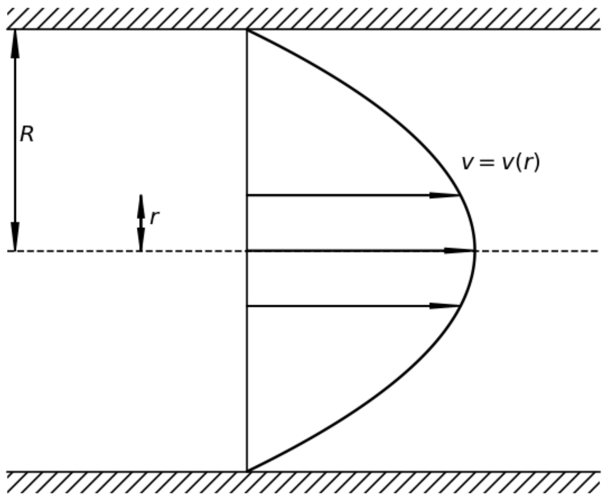

Abbildung 30: Strömungsgeschwindigkeit

Am Rand ist $v(R) = 0$, in der Mitte am größten $v(0) = cR^2$. Die Strömungsgeschwindigkeit an einer Stelle hängt nur von ihrer Entfernung von der Mitte ab.

Wieviel Blut fließt durch die Ader pro Zeiteinheit? Um dies zu berechnen, zerlege man den Querschnitt in dünne Kreisringe mit Radien

$$0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = R.$$

Die Fläche des Kreisringes mit den Radien r_{i-1} und r_i ist

$$F_i = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) = 2\pi \frac{r_i + r_{i-1}}{2}(r_i - r_{i-1}).$$

Die Geschwindigkeit an der Zwischenstelle $(r_i + r_{i-1})/2$ beträgt

$$v_i = v(\frac{r_i + r_{i+1}}{2}) = c(R^2 - (\frac{r_i + r_{i-1}}{2})^2).$$

Bei konstanter Geschwindigkeit v_i strömt pro Zeiteinheit Blut mit dem Volumen $F_i v_i$ durch die Fläche F_i, durch die ganze Ader also Blut vom Volumen

$$\sum_{i=1}^{n} F_i v_i = 2\pi c \sum_{i=1}^{n} \left(R^2 - (\frac{r_i + r_{i-1}}{2})^2 \right) \frac{r_i + r_{i-1}}{2}(r_i - r_{i-1}).$$

Lässt man die Feinheit der Teilung $(r_i)_{i=0}^{n}$ gegen 0 streben, konvergieren diese Riemannsummen gegen das Integral

$$2\pi c \int_0^R (R^2 - r^2) r \; dr = 2\pi c(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}) = \frac{\pi c}{2} R^4.$$

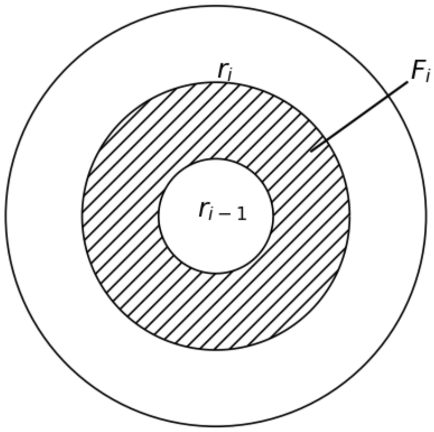

Abbildung 31: Approximation durch Kreisringe

(b) **Rotationskörper:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Lässt man den Graphen von f um die x-Achse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper $R = R(f)$. Wie groß ist das Volumen von R?

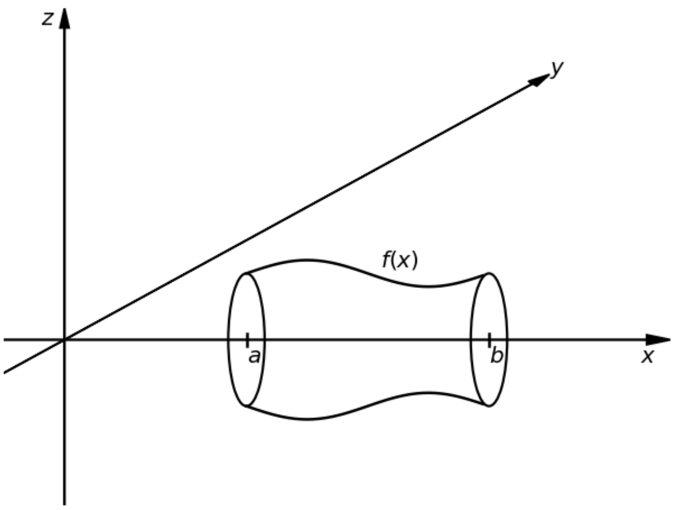

Abbildung 32: Volumen von Rotationskörpern

Sei $T = (x_i)_{i=0}^n$ eine Teilung von $[a,b]$, das heißt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, und $z = (z_i)_{i=1}^n$ eine Zwischenfolge, das heißt $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Das Volumen des Rotationskörpers mit Radius $f(z_i)$ über

$]x_{i-1}, x_i[\ (i = 1, \ldots, n)$

$$V(T, Z) = \sum_{i=1}^{n} \pi f(z_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

konvergiert mit $\omega(T) \longrightarrow 0$ gegen das gesuchte Volumen V von R

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

(c) **Länge von Kurven:** Sei $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Fasse den Graphen von f als Kurve $K = K(f) \subset \mathbb{R}^2$ auf. Approximiere die Kurve durch einbeschriebene Polygonzüge.

Die Länge $L(P)$ des Polygonzuges $P = P(T)$ gebildet zur Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} |(t_i, f(t_i)) - (t_{i-1}, f(t_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i)) - f(t_{i-1})^2}.$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 10.4) gibt es Punkte $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ mit $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$. Nach Satz 11.1 konvergiert

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

für $\omega(T) \longrightarrow 0$ gegen das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \overset{\text{Def}}{=} \text{Länge der Kurve } K(f).$$

Allgemeiner: Für eine parametrisierte Kurve

$$\gamma :\ [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert man die **Länge der Kurve** durch

$$L(\gamma) \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt.$$

Oben haben wir den Spezialfall $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = f(t)$ betrachtet.

11.7 Uneigentliche Integrale

Ist $f :\ [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und xistiert der Limes

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t) dt \in \mathbb{R},$$

so nennt man

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t) dt$$

das **uneigentliche Integral** von f über $[a,\infty)$. Ist $f:\ [a,b[\to \mathbb{R}$ stetig und unbeschränkt und existiert

$$\lim_{x\uparrow b}\int\limits_a^x f(t)dt \in \mathbb{R},$$

so nennt man diesen Limes das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$ und schreibt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{x\uparrow b}\int\limits_a^x f(t)dt.$$

Analoge Definitionen benutzt man bei kritischer unterer Grenze.

Beispiele 11.11. (a) Für $s \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt:

$$\int\limits_1^s \frac{1}{t^s}dt = \frac{1}{-s+1}t^{-s+1}|_1^x = \frac{1}{s-1}(1-x^{1-s}) \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{s-1} & ; \quad s>1 \\ \infty & ; \quad s<1. \end{cases}$$

Für $s=1$ gilt:

$$\int\limits_1^x \frac{1}{t}dt = \ln\, x \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \infty.$$

Also existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^s}dt$ genau für $s>1$. Es ist

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^s}dt = \frac{1}{s-1} \qquad (s>1).$$

(b) Für $s \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ und $0<x<1$ gilt:

$$\int\limits_x^1 \frac{1}{t^s}dt = \frac{1}{1-s}(1-x^{1-s}) \overset{(x\downarrow 0)}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & ; \quad 0<s<1 \\ \infty & ; \quad s>1. \end{cases}$$

Für $s=1$ ist:

$$\int\limits_x^1 \frac{1}{t}dt = -\log\, x \overset{(x\downarrow 0)}{\longrightarrow} \infty.$$

Also existiert $\int_0^1 \frac{1}{t^s}dt$ $(s>0)$ als uneigentliches Integral genau für $0<s<1$ und

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{t^s}dt = \frac{1}{1-s} \qquad (0<s<1).$$

(c) Nach Abschnitt 11.4 ist

$$\int\limits_0^x \tfrac{1}{1+t^2}dt = \arctan\, t|_0^x = \arctan\, x \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} \tfrac{\pi}{2},$$
$$\int\limits_x^0 \tfrac{1}{1+t^2}dt = \arctan\, t|_x^0 = -\arctan\, x \overset{(x\to-\infty)}{\longrightarrow} \tfrac{\pi}{2}.$$

Also ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt$$

und man definiert

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}dt \overset{\text{Def}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \pi.$$

(d) Es ist

$$\int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^x = 1 - e^{-x} \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 1 = \int_0^\infty e^{-t}dt.$$

Man kann zeigen:

Satz 11.12. *Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig so, dass ein $R > a$ existiert mit $|f(t)| \leq |g(t)|$ für alle $t \geq R$. Dann gilt: Existiert $\int_a^\infty |g(t)|dt$, so existiert auch $\int_a^\infty f(t)dt$. Entsprechendes gilt für stetige Funktionen $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ und stetige unbeschränkte Funktionen $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ oder $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ mit kritischer Grenze b oder a.*

Beispiel 11.13. Mit Satz 11.12 und Beispiel 11.11 (d) folgt leicht, dass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt$$

existiert. Man kann zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

11.8 Partialbruchzerlegung

Sei

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine **rationale Funktion** mit Polynomen

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \ q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \ (a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0 \neq b_m).$$

(a) Ist $n \geq m$, so erhält man durch **Division mit Rest** eine Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{p_k(x)}{q(x)},$$

wobei p_{n-m}, p_k Polynome sind mit $\deg(p_{n-m}) = n - m$ und

$$p_k = 0 \text{ oder } \deg(p_k) = k < m.$$

Beispiel 11.14. Sei $r(x) = \frac{3x^3}{x^2+2x-2}$. Division mit Rest liefert:

$$
\begin{array}{lllll}
3x^3 & : & x^2+x-2 & = & 3x-3 \quad + \quad \frac{9x-6}{x^2+x-2} \\
-(\underline{3x^3+3x^2-6x}) & & & & \\
\quad -3x^2+6x & & & & \\
\quad -(\underline{-3x^2-3x+6}) & & & & \\
\qquad 9x-6 & & & &
\end{array}
$$

(b) Sei $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wie oben mit $n = \deg(p) < \deg(q) = m$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Folgerung 8.4) hat q eine Linearfaktorzerlegung der Form

$$q(x) = b_m(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}$$

mit paarweise verschiedenen $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$ und $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $k_1 + \dots + k_r = m$. Man nennt k_i die **Vielfachheit der Nullstelle** c_i von $q(x)$. Da die Koeffizienten von q reell sind, ist mit c auch $\overline{c}$ Nullstelle von q:

$$0 = \overline{q(c)} = \sum_{i=0}^{m} \overline{b_i}\ \overline{c}^i = \sum_{i=0}^{m} b_i\ \overline{c}^i = q(\overline{c}).$$

Man kann zeigen, dass die Vielfachheiten der Nullstellen c und $\overline{c}$ gleich sind. Also hat $\frac{q(x)}{b_m}$ eine Zerlegung in ein Produkt reeller Polynome der Form

(i) $(x-a)^k \qquad (a \in \mathbb{R})$,

(ii) $(x^2+bx+c)^\ell \qquad (b, c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{b^2}{4} < c)$.

Man kann zeigen, dass $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine Summe ist von Ausdrücken der Form

(i)$'$ $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$,

(ii)$'$ $\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_\ell x+C_\ell}{(x^2+bx+c)^\ell}$

mit Zahlen $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, wobei jeder Faktor der Form (i) bzw. (ii) einen Beitrag der Form (i)$'$ bzw. (ii)$'$ liefert.

Beispiele 11.15. (a) Sei $r(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$. Da $q(x) = (x-1)(x-2)$ aus zwei Faktoren vom Typ (i) mit $k = 1$ besteht, gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden Zähler erhält man

$$A + B = 1 \text{ und } -2A - B = 0.$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert $A = -1$ und damit $B = 2$. Also ist

$$\int r(x)dx = 2\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx = 2\ \ln|x-2| - \ln|x-1|$$

Stammfunktion für $r(x)$ auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $1, 2 \notin I$.

(b) Sei $r(x) = \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$. Da $q(x) = (x-1)(x^2+1)$ aus einem Faktor vom Typ (i) mit $k = 1$ und einem Faktor vom Typ (ii) mit $\ell = 1$ besteht, gibt es $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden Zähler erhält man

$$A + B = 0,\ C - B = 0,\ A - C = 2.$$

Addieren der drei Gleichungen liefert $A = 1$, also $B = -1 = C$. Also ist

$$\int r(x)dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x$$

eine Stammfunktion von r auf jedem Intervall $I \in \mathbb{R}$ mit $1 \notin I$.

(c) Sei $r(x) = \frac{x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$. Da

$$q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)$$

aus einem Faktor vom Typ (i) mit $k = 2$ und einem Faktor vom Typ (ii) mit $\ell = 1$ besteht, gibt es $A_1, A_2, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$r(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = [A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^2]/q(x).$$

Durch Koeffizientenvergleich der beiden Zähler erhält man

$$A_1 + B = 0,\ -A_1 + A_2 - 2B + C = 0,\ A_1 + B - 2C = 1,\ -A_1 + A_2 + C = 0.$$

Also ist $A_1 = -B$ und $C = -\frac{1}{2}$. Aus

$$A_2 - B + C = 0 = A_2 + B + C$$

folgt, dass $B = 0 = A_1, A_2 = \frac{1}{2}$ ist. Folglich ist

$$\int r(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{1}{x-1}\right).$$

eine Stammfunktion von r auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $1 \notin I$.

12 Numerische Verfahren und Interpolation

12.1 Numerische Integration

Funktionen, für die man keine Stammfunktion angeben kann, wie etwa

$$e^{-x^2}, \ \frac{1}{\ln x}, \ \frac{\sin x}{x}, \ldots$$

oder Funktionen, von denen man nicht alle Werte kennt, kann man versuchen, numerisch zu integrieren. Da zu approximiert man $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ durch Funktionen, deren Integral einfacher zu berechnen ist.

(A) Trapezregel

Ersetzt man $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ durch die lineare Funktion g, die in a und b mit f übereinstimmt,

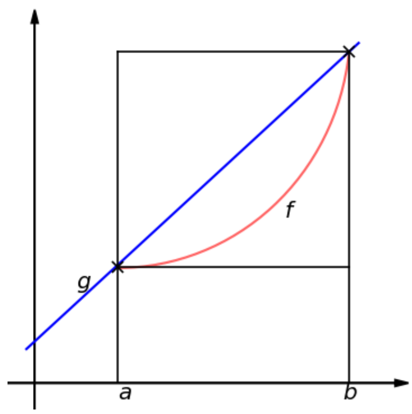

Abbildung 33: Trapezregel

erhält man näherungsweise (**Trapezregel**)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b g(x)dx = f(a)(b-a) + \frac{1}{2}(f(b) - f(a))(b-a) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Wendet man diese Regel auf alle Teilintervalle einer **äquidistanten Teilung**

$$T = (x_i)_{i=0}^n = (a + i\frac{b-a}{n})_{i=0}^n \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

mit Schrittweite $h = h_n = \frac{b-a}{n}$ an, so erhält man die **Sehnentrapezregel**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{2n}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{2n}(f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)) =: \mathbf{T_n(f)}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen:

Satz 12.1. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar (d.h. f ist 2-mal differenzierbar und f'' ist noch stetig) und ist $|f''| \leq M$ auf $[a,b]$, so lässt sich der Fehler*

$$E_n(f) = \int\limits_a^b f(x)dx - T_n(f)$$

abschätzen durch

$$|E_n(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M$$

mit $h = h_n = \frac{b-a}{n}$.

Eine Halbierung der Schrittweite h verkleinert den Fehler um den Faktor 4.

(B) Keplersche Faßregel (Johannes Kepler, 1571-1630)

Sei $f : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $c = \frac{a+b}{2}$. Dann gibt es genau ein Polynom $p = p_f$ vom Grade ≤ 2 mit

$$p(a) = f(a),\ p(c) = f(c),\ p(b) = f(b),$$

nämlich

$$p(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-b)(c-a)}.$$

Approximiert man f durch p, so erhält man die **Keplersche Faßregel**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \cong \int\limits_a^b p(x)dx = (f(a) + 4f(c) + f(b))\frac{b-a}{6} = \mathbf{S(f)}.$$

Zur Begründung der letzten Identität schreibe man

$$a = c - \Delta,\ b = c + \Delta \text{ mit } \Delta = \frac{b-a}{2},$$

schreibe p als Polynom in $x - c$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a)\tfrac{(x-c-\Delta)(x-c)}{2\Delta^2} + f(b)\tfrac{(x-c+\Delta)(x-c)}{2\Delta^2} - f(c)\tfrac{(x-c+\Delta)(x-c-\Delta)}{\Delta^2} \\ &= f(c) + \tfrac{f(b)-f(a)}{2\Delta}(x-c) + \tfrac{f(a)+f(b)-2f(c)}{2\Delta^2}(x-c)^2 \end{aligned}$$

und integriere:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b p(x)dx &= f(c)x|_a^b + \tfrac{f(b)-f(a)}{2\Delta}\tfrac{(x-c)^2}{2}|_a^b + \tfrac{f(a)+f(b)-2f(c)}{6\Delta^2}(x-c)^3|_a^b \\ &= 2f(c)\Delta + (f(a)+f(b)-2f(c))\tfrac{\Delta}{3} \\ &= (f(a)+f(b)+4f(c))\tfrac{b-a}{6}. \end{aligned}$$

Bemerkung 12.2. (a) Ist f ein Polynom vom Grade ≤ 2, so gilt Gleichheit in der Keplerschen Faßregel, denn dann ist $p_f = f$.

(b) Gleichheit gilt auch für Polynome f vom Grade ≤ 3. Zur Begründung zeige man nacheinander:

(i) Gilt Gleichheit für f_1 und f_2, so auch für $f_1 \pm f_2$.

(ii) Für $f(x) = A(x-c)^3$ gilt Gleichheit (beide Seiten sind 0).

(iii) Dann gilt aber auch Gleichheit für

$$Ax^3 = A(x-c)^3 - (A(x-c)^3 - Ax^3)$$

und damit für jedes Polynom vom Grade ≤ 3.

(c) Ist f 4-mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und ist $|f^{(4)}| \leq M$, so gilt

$$|\int_a^b f(x)dx - S(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M.$$

Auch aus dieser Fehlerabschätzung folgt, dass für Polynome f vom Grade ≤ 3 Gleichheit in der Keplerschen Faßregel gilt.

(C) Die Simpson-Regel (Thomas Simpson, 1710-1761)

Sei $T = (x_i)_{i=0}^{2n}$ die äquidistante Teilung von $[a,b]$ mit

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n} \qquad (i = 0, \dots, 2n).$$

Wendet man auf jedes Intervall $[x_{2(i-1)}, x_{2i}]$ $(i = 1, \dots, n)$ die Keplersche Faßregel an, so erhält man die **Simpson-Regel**:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f(x)dx &\cong \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n}(f(x_{2(i-1)} + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}))) \\ &= \frac{b-a}{6n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)).\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der Fehler bei dieser Approximation für eine 4-mal stetig differenzierbare Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ proportional ist zu $(b-a)h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$ mit $h = h_n = \frac{b-a}{2n}$.

Beispiele 12.3.

$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_0^1 x^5$	$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$
Wirklicher Wert 1/3	$1/6 = 0,1\overline{6}$	$\ln 2 \cong 0,69$
Trapezregel $\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = 3/4 = 0,75$
Keplersche Faßregel 1/3	$\frac{1}{6}(0+4(\frac{1}{2})^5+1) = 0,1875$	$\frac{1}{6}(1+4\frac{2}{3}+\frac{1}{2}) = 25/36 = 0,69\overline{4}$

12.2 Newtonverfahren zur Auflösung von Gleichungen

Jedes reelle Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit ungeradem Grad $\deg(p)$ hat mindestens eine reelle Nullstelle. Dies folgt sehr einfach mit dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) und der Beobachtung, dass einer der beiden Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ gleich $+\infty$ und der andere gleich $-\infty$ ist (siehe Bemerkung 10.11). Der Zwischenwertsatz liefert nur die Existenz einer Nullstelle. Wie findet man eine?

Ist $p(x) = x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b^2}{4} - c)$ ein normiertes reelles Polynom zweiten Grades, so gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{b^2}{4} < c \quad &\Rightarrow \quad p \text{ hat keine reelle Nullstelle,} \\ \tfrac{b^2}{4} \geq c \quad &\Rightarrow \quad p \text{ hat die Nullstellen } x = -\tfrac{b}{2} \pm \sqrt{\tfrac{b^2}{4} - c}. \end{aligned}$$

Für die Nullstellen von Polynomen vom Grade 3 und 4 gibt es ähnlich explizite Formeln. Für Polynome p vom Grade $\deg(p) \geq 5$ nicht! Das Newton-Verfahren erlaubt es, unter bestimmten Bedingungen Nullstellen bis auf vorgegebene Genauigkeit zu berechnen. Man zeigt in der Mathematik:

Satz 12.4. (Newton-Verfahren)
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar mit $f(a) < 0 < f(b)$ und $f'' \geq 0$ (oder mit $f(a) > 0 > f(b)$ und $f'' \leq 0$). Dann gilt:

(i) Es gibt genau ein $\xi \in\ ]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.

(ii) Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$ (bzw. $f(x_0) \leq 0$), so wird durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0)$$

eine Folge definiert, die monoton fallend gegen ξ konvergiert.

(iii) Ist $|f'(\xi)| \geq C > 0$ und $|f''| \leq K$ auf $[a,b]$, so gilt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{K}{2C}|x_{n+1} - x_n|^2 \leq \frac{K}{2C}|x_n - \xi|^2 \qquad (n \geq 0).$$

Man beachte, dass die Bedingung $|f'(\xi)| \geq C > 0$ in (iii) für $f'' \geq 0$ erfüllt ist, falls

$$f'(a) \geq C > 0$$

ist, und im Falle $f'' \leq 0$, falls

$$f'(a) \leq -C < 0$$

ist. Die optimale Wahl von C im ersten Fall ist $C = f'(a)$, im zweiten Fall $C = -f'(a)$.

Beispiel 12.5. Sei $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$. Dann ist

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2 = 3((x - \frac{4}{3})^2 - \frac{10}{9}) = 3\ (x - \frac{4+\sqrt{10}}{3})(x - \frac{4-\sqrt{10}}{3}).$$

Mit $c_\pm = (4 \pm \sqrt{10})/3$ folgt

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\text{für} \quad x \notin [c_-, c_+], \\ f'(x) < 0 \quad &\text{für} \quad x \in [c_-, c_+] \end{aligned}$$

und $f'(x) = 0$ für $x = c_\pm$. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 6x - 8 \begin{cases} > 0 \text{ für } & x > 4/3 \\ < 0 \text{ für } & x < 4/3. \end{cases}$$

Also hat f genau zwei lokale Extrema:

- ein lokales Maximum in $c_- = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$,
- ein lokales Minimum in $c_+ = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$.

Setze $a = 1$ und $b = \frac{4}{3}$. Es ist $f''|_{[a,b]} \leq 0$,

- $f(1) = 1 > -\frac{2}{27} = f(\frac{4}{3})$,
- $f'(1) = -3 < 0,\ |f''(x)| = 8 - 6x \leq 2$ für $x \in [1, \frac{4}{3}]$.

Insbesondere hat f drei Nullstellen. Die Fehlerabschätzung in Teil (iii) von Satz 12.4 gilt mit $C = 3$ und $K = 2$.

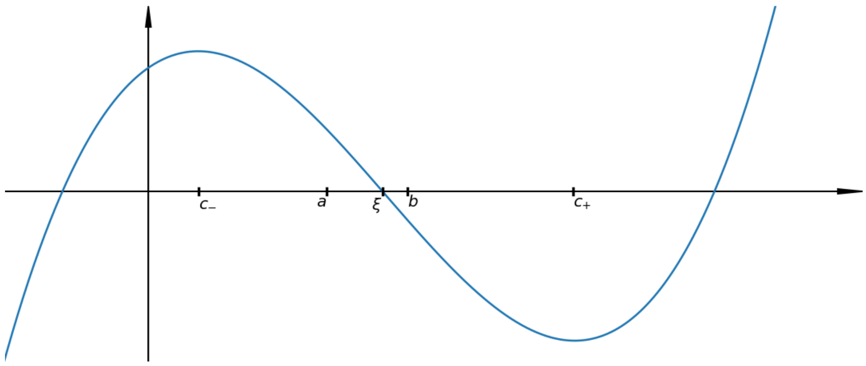

Abbildung 34: Newton-Verfahren

Die mittlere Nullstelle kann man mit dem Newton-Verfahren (Satz 12.4) approximieren. Setze $x_0 = \frac{4}{3}$. Dann ist $f(x_0) = -2/27,\ f'(x_0) = -10/3$ und

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{4}{3} - \frac{2}{27}\frac{3}{10} = \frac{59}{45} = 1{,}3\overline{1}.$$

Der Abstand von x_1 zur gesuchten Nullstelle $\xi \in [a, b]$ lässt sich abschätzen durch

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{K}{2C}(x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{45^2} = \frac{1}{6075} \leq \frac{1}{6}10^{-3}.$$