**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

# Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

**Blatt 10** Abgabetermin: Mittwoch, 08.01.2020, vor der Vorlesung

## Aufgabe 40 (4 Punkte)

Für $0 < r < R$ sei die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R - r\cos\varphi)\cos\theta \\ (R - r\cos\varphi)\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $T(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche der Klasse $C^\infty$ ist.

(*Hinweis : Drücken Sie für einen Punkt* $(x, y, z) = T(\theta, \varphi) \in M := T(\mathbb{R}^2)$ *die Paare* $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ *und* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *durch* $x, y, z$ *aus. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass für alle Paare* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *die Abbildung*

$$[a, a + 2\pi) \times [b, b + 2\pi) \to M, \quad (\theta, \varphi) \mapsto T(\theta, \varphi)$$

*bijektiv ist. Schließlich überlegen Sie sich, dass* $M$ *durch Einschränkungen dieser Abbildungen auf Mengen der Form* $\Omega_{a,b} = (a, a + 2\pi) \times (b, b + 2\pi)$ *parametrisiert wird. Sie dürfen dabei benutzen, dass aus* $(\cos t_k, \sin t_k) \to (\cos t, \sin t)$ *mit* $t_k, t \in (0, 2\pi)$ *folgt, dass* $t_k \to t$ *gilt.*)

---

## Aufgabe 41 (2x3=6 Punkte)

Sei $\tau_n$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$ und sei $\sigma_n$ das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$.

(a) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(\|x\|)$ Lebesgue-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \, d\lambda = \sigma_n \int_{(0,\infty)} f(r) r^{n-1} \, d\lambda(r).$$

(*Hinweis : Sie dürfen Aufgabe 44 und die Formel* $\mathrm{Vol}(S_{n-1}(r)) = r^{n-1}\,\mathrm{Vol}(S^{n-1})$ *benutzen.*)

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma_n = n\tau_n$ ist.

---

## Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte $p$-dimensionale $C^k$-Untermannigfaltigkeit ($p \in \{1, ..., n\}$, $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$). Zeigen Sie: Ist $f : M \to [0, \infty[$ eine stetige Funktion mit $\int_M f dS = 0$, so ist $f \equiv 0$. (*Hinweis : Die Idee aus dem Beweis der Implikation (i)* $\Rightarrow$ *(ii) von 9.6 könnte helfen*)

---

**(bitte wenden)**

**Aufgabe 43** **(4 Punkte)**

Seien $r, R$ reelle Zahlen mit $0 < r < R$ und sei $K$ die Kreislinie

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - R)^2 + z^2 = r^2,\ y = 0\}.$$

Berechnen Sie die Fläche $A$ des Körpers (ein sogenannter *Torus*), der entsteht, wenn man $K$ um die $z$-Achse rotieren lässt. (*Hinweis : Sie dürfen benutzen, dass* $A = T(\mathbb{R}^2)$ *ist, falls* $T$ *wie in Aufgabe 40 definiert ist.*)

---

**Aufgabe 44*** **(6* Punkte)**

Für $r > 0$ sei $S_{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^n$ die $C^\infty$-Hyperfläche aus Aufgabe 39 und sei $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für $\lambda$-fast alle $r \in (0, \infty)$ die Funktion $f|_{S_{n-1}(r)}$ über $S_{n-1}(r)$ integrierbar ist, und dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{(0,\infty)} \left( \int_{S_{n-1}(r)} f \, dS \right) d\lambda(r).$$

(*Hinweis : Definieren Sie* $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \pm x_n > 0\}$ *und berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 35 die Integrale* $\int_{H_\pm} f \, d\lambda$. *Benutzen Sie für geeignete* $r > 0$ *die Parametrisierungen*

$$g_\pm : B \to V_\pm := H_\pm \cap S_{n-1}(r),\ x \mapsto (rx, \pm r\sqrt{1 - \|x\|^2})$$

*der oberen und unteren Hemisphären* $S_{n-1}(r) \cap H_\pm$, *um* $\int_{S_{n-1}(r)} f \, dS$ *zu berechnen. Sie müssen dabei nicht unbedingt zeigen, dass es sich bei obigen Abbildungen um Parametrisierungen handelt und dürfen benutzen, dass*

$$\sqrt{G_\pm(x)} = r^{n-1} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|rx\|^2}} \quad (x \in B)$$

*gilt (vgl. Bsp. 9.12 (d)).* )

---

## Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2020!

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre**