UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 11 Abgabetermin: Mittwoch, 15.01.2020, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 45 **(2+1+2=5 Punkte)**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte p-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ($p \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). Zeigen Sie:

(a) Es gibt endlich viele Parametrisierungen $g_j : \Omega_j \tilde{\to} V_j \subset M$ ($j = 1, \dots, r$) und messbare Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, r$) derart, dass für jede integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_M f\, dS = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Omega_j} (\alpha_j f) \circ g_j \sqrt{G_j}\, d\lambda.$$

(b) Für jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(M)$ und für g_j, α_j wie in (a) gilt

$$\mathrm{Vol}_p(A) = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Omega_j} \alpha_j \circ g_j \chi_{g_j^{-1}(A)} \sqrt{G_j}\, d\lambda.$$

(c) Durch $\mu : \mathcal{B}(M) \to [0, \infty)$, $\mu(A) = \mathrm{Vol}_p(A)$ wird ein Maß definiert.
(*Hinweis: Für eine disjunkte Vereinigung* $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ *von Borelmengen ist*

$$\chi_{g_j^{-1}(A)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \chi_{g_j^{-1}(A_k)}$$

punktweise.)

Aufgabe 46 **(1+2+2*=3+2* Punkte)**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte p-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit wie in Aufgabe 45 und $\mu : \mathcal{B}(M) \to [0, \infty)$ das Maß aus Teil (c) von Aufgabe 45. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in \mathrm{St}(\mu, \mathbb{C})$ gilt $\int_M f\, dS = \int_M f\, d\mu$.

(b) Für jede beschränkte messbare (insbesondere jede stetige) Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist

$$\int_M f\, dS = \int_M f\, d\mu.$$

(*Hinweis: Approximieren Sie* f *durch Treppenfunktionen wie in Bemerkung 1.15 (a).*)

(c) * Eine Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ ist eine Nullmenge im Sinne von Aufgabe 38 genau dann, wenn $\mu(A) = 0$ ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 47 **(2+1+1+2=6 Punkte)**

Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre, $\sigma : \mathcal{B}(S^{n-1}) \to [0, \infty)$, $\sigma(A) = \mathrm{Vol}_p(A)$ das wie in Aufgabe 45 definierte Maß und $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung, d.h. eine lineare Abbildung mit $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(A) = \sigma(U^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}(S^{n-1})$.

(b) Für $f \in \mathrm{St}(\sigma, \mathbb{C})$ ist $\int_{S^{n-1}} f\, d\sigma = \int_{S^{n-1}} f \circ U\, d\sigma$.

(c) Ist $(f_k)_k$ eine $\mathscr{L}^1$-Cauchy-Folge in $\mathrm{St}(\sigma, \mathbb{C})$, so auch $(f_k \circ U)_k$.

(d) Die Formel in Teil (b) gilt auch für alle $f \in \mathscr{L}^1(\sigma, \mathbb{C})$.

(*Hinweis: Benutzen Sie Satz 9.13 der Vorlesung und beachten Sie, dass mit* $f, g \in \mathrm{St}(\sigma, \mathbb{C})$ *auch* $|f - g| \in \mathrm{St}(\sigma, \mathbb{C})$.)

Aufgabe 48 **(4 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a > 0$. Berechnen Sie die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R};\ (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{a})^2 + (\tfrac{z}{b})^2 = 1\right\}.$$

(*Hinweis: Es ist* $\int \sqrt{R^2 - t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{R^2 - t^2} + R^2 \arcsin(\frac{t}{R})\right)$.)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre