UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 12 Abgabetermin: Mittwoch, 22.01.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Sei $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (3x^2 z, y^2 - 2x, z^3)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, dS.$$

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand derart, dass $0 \in \operatorname{Int}(A)$. Es bezeichne $\alpha(x)$ den Winkel zwischen x und $\nu(x)$ für $x \in \partial A$. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial A} \frac{\cos \alpha(x)}{\|x\|^{n-1}} \, dS(x) = \sigma_n \qquad (\sigma_n := \operatorname{Vol}(S^{n-1})).$$

(*Hinweis : Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz an auf das Vektorfeld* $F(x) = \frac{x}{\|x\|^n}$ *und Mengen der Form* $A_\varepsilon = \{x \in A;\ \|x\| \geq \varepsilon\}$. *Sie dürfen benutzen, dass*

$$\int_{M \cup N} f \, dS = \int_M f \, dS + \int_N f \, dS$$

für zwei kompakte C^k*-Untermannigfaltigkeiten* $M, N \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $M \cap N = \emptyset$ *und jede integrierbare Funktion* $f : M \cup N \to \mathbb{C}$ *gilt.*)

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, sei $a \in U$ und $(A_k)_k$ eine Folge von Kompakta $A_k \subset U$ mit glattem Rand derart, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $A_k \subset B_\varepsilon(a)$ für alle $k \geq N$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda(A_k)} \int_{\partial A_k} \langle F, \nu_k \rangle \, dS.$$

Hierbei sei $\nu_k : \partial A_k \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld von A_k.

(bitte wenden)

Aufgabe 52* **(1* + 3* + 2* = 6* Punkte)**

Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ und sei $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Zeigen Sie:

(a) $\int_{\partial A} \frac{\partial f}{\partial v} dS = 0$ (mit den Bezeichnungen aus Satz 11.8)

(b) Ist $\overline{B_1(0)} \subseteq U$, so ist $\int_{S^{n-1}} f dS = \int_{S^{n-1}} f(\epsilon x) dS(x)$ für $0 < \epsilon < 1$. (*Hinweis : Wenden Sie die Greensche Formel an auf* $A_\epsilon = \overline{B_1(0)} \backslash B_\epsilon(0)$ *und die harmonischen Funktionen* f *und* $g(x) = \|x\|^{2-n}$ *(Analysis II 5.17)*)

(c) Ist $\overline{B_1(0)} \subseteq U$, so gilt

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f dS = f(0).$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre