UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 13 Abgabetermin: Mittwoch, 29.01.2020, vor der Vorlesung

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \in o(r^\alpha)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq \epsilon \|x\|^\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \geq R$.

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Sei $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld so, dass $\operatorname{div}(F) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt und $F_k \in o(r^{1-n})$ ist für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(F)\, d\lambda = 0$$

Aufgabe 54 (3 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^3$ sei ω die Differentialform

$$\omega = 2xzdy \wedge dz - (z^2 + e^y)dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, dass $d\omega = 0$ ist und bestimmen Sie eine 1-Form η auf $\mathbb{R}^3$ mit $w = d\eta$.

Sei ω eine k-Form der Klasse C^∞ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt ω geschlossen, falls $d\omega = 0$ ist und exakt, falls $k \geq 1$ ist und eine $(k-1)$-Form η der Klasse C^∞ über U existiert mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 55 (2+2=4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\omega_1 \in \Lambda^k(dx, C^\infty(U))$, $\omega_2 \in \Lambda^l(dx, C^\infty(U))$. Zeigen Sie:

(a) Sind ω_1 und ω_2 geschlossen, so ist auch $\omega_1 \wedge \omega_2$ geschlossen.

(b) Sind ω_1 und ω_2 exakt so ist auch $\omega_1 \wedge \omega_2$ exakt.

(bitte wenden)

Für eine C^1-Funktion $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon U \to V$ ($V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen) und eine Differentialform $\omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ über V ist der Pull-Back von ω unter f definiert als die k-Form $\varphi^*(\omega) = (f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}$.

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Sei $\varphi\colon U \to V$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ eine Differentialform vom Grade n über V, so ist für alle $x \in U$

$$\varphi^*(\omega)(x) = \det(\varphi'(x)) f \circ \varphi(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

(*Hinweis : Die Determinante einer Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ hat die Darstellung*

$$\det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

.)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre