UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 14 Abgabetermin: /

Dieses Übungsblatt soll der Vorbereitung auf die Klausur dienen. Sie sollten deshalb jede Aufgabe selbständig bearbeiten. Die Aufgaben werden nicht korrigiert und daher auch nicht abgegeben.

Aufgabe 57

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ das System aller nach links halboffenen Intervalle der Länge 1, also

$$I \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } I = (x, x+1].$$

Bestimmen Sie die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 58

Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass genau dann f messbar ist, wenn $\{x \in X;\ f(x) \geq q\} \in \mathfrak{M}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 59

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_{[0,\infty)} f \, d\lambda$.

Aufgabe 60

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Funktion

$$f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mit

$$a_n = \int_{[0,\pi]} f_n \, d\lambda$$

für $n \in \mathbb{N}^*$ konvergiert und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(bitte wenden)

Aufgabe 61

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $0 \le f \le g$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2;\ f(x) \le \sqrt{y^2 + z^2} \le g(x)\}$$

zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ gehört und berechnen Sie das Volumen $\lambda(K)$ von K.

Aufgabe 62

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ und sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\lambda(M) = 0$ ist. (*Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 28 (a).*)

Aufgabe 63

Sei $\tau_n = \lambda(K_n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \le 1\}.$$

Für $r, a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ sei

$$E = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \le r^2 \right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen $\lambda(E)$ von E in Abhängigkeit von τ_n.

Aufgabe 64

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-x^2 - y^2}$. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \pi.$$

Benutzen Sie dabei Polarkoordinaten und den Satz von der monotonen Konvergenz. Folgern Sie anschließend, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 65

Bestimmen Sie das 2-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_2(M)$ der Rotationsfläche

$$M = \{(x, y, z) \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 = (\cos x)^2\}.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre